

# تابش خودبخودی در لیزر الکترون آزاد با ویگلر تخت تعمیم یافته

فاطمه بازوبند\*

دانشگاه فسا، دانشکده علوم پایه، گروه فیزیک

دریافت: ۹۵/۳/۲۴

پذیرش: ۹۶/۱۱/۱۵

## چکیده:

در این مقاله مسیر حرکت الکترون در لیزر الکترون آزاد با ویگلر تخت تعمیم یافته با استفاده از دینامیک تک ذره تحلیل و بررسی شد. نشان داده‌ایم که نوسانات عرضی الکترون در فرکانس‌های میدان اصلی و هارمونیک ویگلر منجر به ظهور هارمونیک‌های جدیدی در این لیزر می‌شود. تابش خودبخودی این لیزر به طور تحلیلی محاسبه شده و نشان داده‌ایم که این تابش تنها در فرکانس تشدید اصلی سیستم و هارمونیک‌های فرد آن یا هارمونیک‌های فردی به صورت ترکیبی از فرکانس ویگلر اصلی و هارمونیک‌های ویگلر وجود دارد. سپس تابش خودبخودی را به طور عددی محاسبه کرده و نشان داده‌ایم که قله‌های به وجود آمده در طیف فرکانسی این تابش با محاسبات تحلیلی ما در توافق است.

**واژه‌گان کلیدی:** لیزر الکترون آزاد، ویگلر تعمیم یافته، تابش خودبخودی، تولید هارمونیک‌ها

## مقدمه

تابش هارمونیک در لیزر الکترون آزاد به عنوان مهم‌ترین روش‌ها برای رسیدن به طول موج‌های کوتاه‌تر با استفاده از پرتو الکترونی با انرژی کم‌تر بوده است [۷-۱]. در FEL‌های فشرده<sup>۱</sup> که در محدوده طول موج‌های بلند کار می‌کنند، پرتو الکترونی با جریان یا ولتاژ پایین برای کاهش اندازه و هزینه منبع الکترونی مورد نظر به کار گرفته می‌شود. به همین دلیل این نوع لیزرهای الکترون آزاد به خاطر کاربردهای فراوانی که در صنعت و پزشکی دارند، همواره مورد توجه زیادی بوده‌اند [۸-۹].

تابش در هارمونیک‌های بالاتر فرکانس اصلی لیزر الکترون آزاد، به خاطر ملاحظات خاصی در حرکت طولی الکترون اتفاق می‌افتد. در FEL با وجود ویگلر تخت، الکترون در عبور از میدان‌های مغناطیسی تناوبی، نوسانات طولی کوچکی از خود نشان می‌دهد که این نوسانات طولی حرکت الکترون منجر به تولید هارمونیک‌ها خواهد شد. در حالی که در لیزر الکترون

\* نویسنده مسئول: fbazooband@gmail.com

<sup>1</sup> Compact FELs

آزاد یک‌بعدی با وجود ویگلر پیچشی به خاطر ثابت بودن سرعت محوری الکترون، هارمونیک‌ها خودنمایی نمی‌کنند [۱۰]. بر این اساس در این مقاله لیزر الکترون آزاد با ویگلر تخت بررسی شد.

با استفاده از ویگلر تخت تعمیم یافته که شامل یک ویگلر تخت معمولی با مؤلفه میدان هارمونیک ویگلر است، می‌توان به تولید هارمونیک‌های جدیدی دست یافت. اضافه کردن میدان هارمونیک به میدان اصلی ویگلر با نسبت و فاز مناسب می‌تواند فرکانس هارمونیک تولید شده را تنظیم کرده و بهره آن را نیز افزایش دهد [۱۱]. بنابراین با استفاده از ویگلر تعمیم یافته در لیزر الکترون آزاد می‌توان عملکرد لیزر را در محدوده وسیع‌تر فرکانسی گسترش داد. سادگی ساخت این ویگلر هارمونیک‌دار که شامل یک ویگلر تخت معمولی و لایه فلزی<sup>۲</sup> نازک با نفوذپذیری<sup>۳</sup> مغناطیسی بالایی است، باعث توسعه انواع مختلف آن شده است که از لحاظ اقتصادی هم بسیار مقرون به صرفه هستند. به همین علت بررسی‌های زیادی نیز در این نوع ویگلرها انجام گرفته است. تابش خودبخودی و بهره سیگنال کوچک FEL با انواع ویگلرهای هارمونیک‌دار به‌طور تحلیلی بررسی شده‌اند [۱۲-۱۴] و اثر مهم پخش انرژی پرتو الکترونی بر طیف بهره سیگنال کوچک هم لحاظ شده است [۱۵]. ساخت و ساز آزمایشگاهی برای تقویت تابش هارمونیک سوم در مرجع‌های [۱۶-۱۷] و آزمایش تولید هارمونیک پنجم با یک ویگلر تعمیم یافته در مرجع [۱۸] معرفی شده است. نمایی از یک ویگلر تعمیم یافته با دوره تناوب ویگلر ۶ سانتی‌متر در شکل (۱) دیده می‌شود.

در این مقاله تابش خودبخودی لیزر الکترون آزاد با ویگلر تخت تعمیم یافته به طور تحلیلی و عددی محاسبه شده و ظهور هارمونیک‌های مختلف بررسی شده است. در بخش دوم مسیر حرکت الکترونی که به طور محوری وارد منطقه برهم‌کنش لیزر با ویگلر تعمیم یافته می‌شود را با استفاده از دینامیک تک ذره به دست آورده و در بخش سوم و چهارم طیف تابش خودبخودی این الکترون را به‌طور تحلیلی و عددی محاسبه کرده‌ایم. در بخش پنجم خلاصه و نتیجه‌گیری بیان شده است.

## مسیر حرکت الکترون

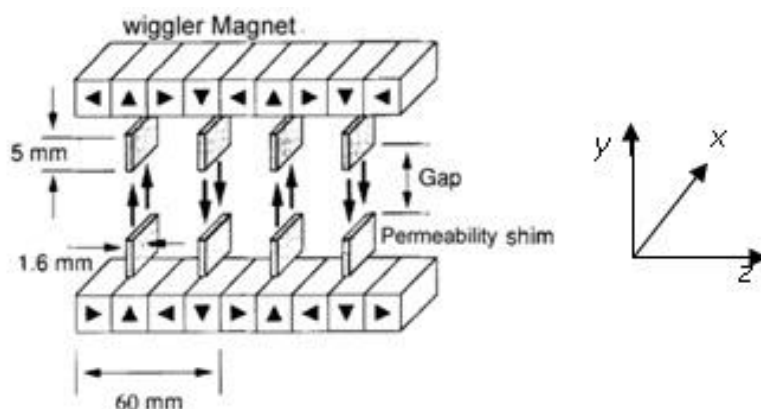
فرض کنید الکترون (با بار  $-e$ ، جرم  $m$  و انرژی  $\gamma mc^2$ ) با سرعت نسبی  $(\vec{v} = \vec{\beta}c)$  در طول محور  $z$  میدان مغناطیسی یک ویگلر تخت تعمیم یافته که با معادله (۱) بیان می‌شود، حرکت می‌کند.

$$\mathbf{B}(z) = (B_{w1} \sin(k_{w1}z) + B_{w3} \sin(k_{w3}z)) \hat{e}_y, \quad (1)$$

<sup>2</sup> Shim

<sup>3</sup> Permeability

که  $k_{w3} = 3k_{w1}$  ،  $k_{w1} = 2\pi/\lambda_w$  به ترتیب عدد موج ویگلر اصلی و هارمونیک سوم هستند.  $B_{w3}$  و  $B_{w1}$  بیشینه اندازه میدان اصلی و هارمونیک سوم هستند. معادلات حرکت عرضی الکترون بر اساس معادلات نیروی لورنتز چنین می‌شود،



شکل ۱: نمایی از یک ویگلر تخت تعمیم یافته [۱۷]

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\gamma m v_x) &= \frac{-e}{c} v_z (B_{w1} \sin(k_{w1}z) + B_{w3} \sin(k_{w3}z)) \\ \frac{d}{dt}(\gamma m v_y) &= 0 \\ \frac{d}{dt}(\gamma m v_z) &= \frac{-e}{c} v_x (B_{w1} \sin(k_{w1}z) + B_{w3} \sin(k_{w3}z)). \end{aligned} \quad (2)$$

اگر الکترون با انرژی  $\gamma_0 m c^2$  و سرعت  $\beta_0 c$  به‌طور محوری به منطقه برهم‌کنش وارد شود، معادلات بالا می‌توانند به‌طور اختلالی برحسب مراتبی از میدان مغناطیسی ویگلر حل شوند. در تقریب مرتبه صفرم الکترون در طول محور Z با سرعت محوری ثابت  $\beta_0 c$  حرکت می‌کند و  $\gamma_0$  ثابت حرکت خواهد بود. میدان ویگلر الکترون را منحرف کرده و جابجایی‌ها و سرعت‌های عرضی برای حرکت الکترون ایجاد می‌کند که (تا پایین‌ترین مرتبه ویگلر) به‌شکل زیر است:

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{c}{\gamma_0} (\Omega_{w1} \cos \kappa_{w1} z + \Omega_{w3} \sin \kappa_{w3} z), \\ x &= \frac{-1}{\gamma_0} \frac{\Omega_{w1}}{\kappa_{w1}} (\sin \kappa_{w1} z + \frac{\alpha}{3} \sin \kappa_{w3} z), \\ y &= v_y = 0. \end{aligned} \quad (۳)$$

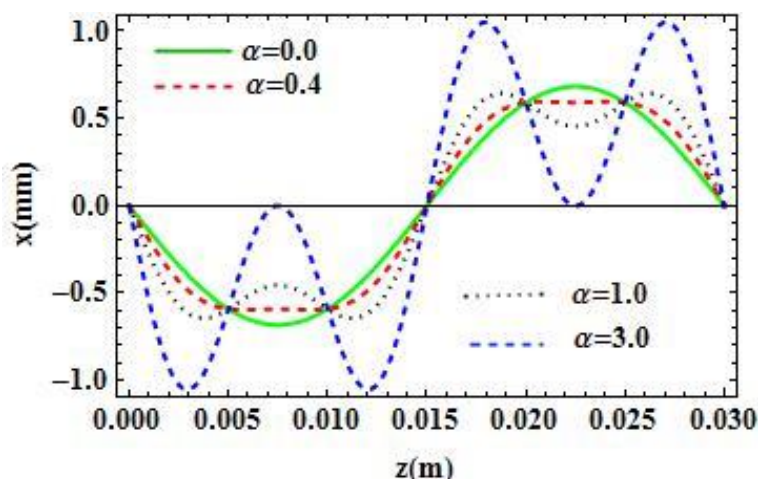
به طوری که  $\Omega_{w1,3} = eB_{w1,3}/mck_{w1,3}$  و  $\alpha = \Omega_{w3}/\Omega_{w1}$ . در رابطه (۳) دیده می‌شود که حرکت عرضی الکترون ترکیبی از نوساناتی است که از فرکانس میدان اصلی ویگلر و مولفه هارمونیک آن تأثیر می‌پذیرد. در شکل (۱) مسیر حرکت الکترون در طول محور Z در طول یک دوره تناوب ویگلر برای اندازه‌های مختلف میدان ویگلر اصلی و هارمونیک سوم با یکدیگر مقایسه شده است. برای  $\alpha = 0$  یعنی با وجود ویگلر تخت معمولی، مسیر نوسانی معمولی الکترون دیده می‌شود که منجر به ظهور هارمونیک‌های فرد می‌شود. با افزایش میدان هارمونیک ویگلر، نوسانات جدید در مسیر الکترون منجر به ظهور هارمونیک‌های جدید می‌شوند که این امر در بخش بعد با محاسبات تحلیلی تابش خودبخودی نشان داده می‌شود. در همه این نمودارها  $\Omega_{w1} = 1.0$  ( $B_w = 2.68 \text{ KG}$ )،  $\lambda_w = 3 \text{ cm}$  و  $\gamma_0 = 7$  ( $= 3.5 \text{ MeV}$ ) است. با جای‌گذاری معادلات سرعت در رابطه بقای انرژی  $\gamma^{-2} = 1 - \beta_x^2 - \beta_y^2 - \beta_z^2$  معادله حرکت طولی الکترون وقتی جملات تا مرتبه دوم  $1/\gamma_0^2$  را نگهداریم به صورت زیر حاصل می‌شود،

$$\begin{aligned} v_z &= \beta_p c + \frac{\Omega_{w1}^2}{4\gamma_0^2} \cos 2\beta_0 \omega_{w1} t + \frac{\Omega_{w3}^2}{4\gamma_0^2} \cos 2\beta_0 \omega_{w3} t - \\ &\frac{\Omega_{w1}\Omega_{w3}}{2\gamma_0^2} [\cos \beta_0 (\omega_{w1} t - \omega_{w3} t) + \cos \beta_0 (\omega_{w1} t + \omega_{w3} t)] \end{aligned} \quad (۴)$$

به طوری که  $\beta_p = 1 - (1 + 0.5\Omega_{w1}^2 + 0.5\Omega_{w3}^2)/2\gamma_0^2$  موقعیت محوری الکترون نیز با انتگرال‌گیری از سرعت محوری چنین می‌شود:

$$\begin{aligned} z &= \beta_p ct + \frac{c}{8\gamma_0^2 \beta_0} \left[ \frac{\Omega_{w1}^2}{\omega_{w1}} \sin 2\beta_0 \omega_{w1} t + \frac{\Omega_{w3}^2}{\omega_{w3}} \sin 2\beta_0 \omega_{w3} t \right] + \\ &\frac{\Omega_{w1}\Omega_{w3}}{8\gamma_0^2 \beta_0} \left[ \frac{1}{\omega_{w1} + \omega_{w3}} \sin 2\beta_0 (\omega_{w1} + \omega_{w3}) t + \frac{1}{\omega_{w1} - \omega_{w3}} \sin 2\beta_0 (\omega_{w1} - \omega_{w3}) t \right] \end{aligned} \quad (۵)$$

به طوری که  $\omega_{w1,3}$  فرکانس ویگلر اصلی و هارمونیک سوم آن است. همان طور که از رابطه حاصل مشاهده می‌شود، سرعت محوری الکترون در فرکانس‌های هردو ویگلر یا ترکیب و تفاضل آن‌ها نوسان می‌کند که این منجر به تولید هارمونیک‌ها در مضاربی از این فرکانس‌ها می‌شود.



شکل ۲: مسیر حرکت الکترون برای مقادیر مختلف میدان هارمونیک ویگلر

### محاسبه تحلیلی تابش خودبخودی

ذره الکترون به واسطه میدان‌های ویگلر تحت تاثیر نیروی لورنتز قرار می‌گیرد و نوسانات عرضی حاصل در مسیر الکترون علاوه بر شتاب طولی آن باعث می‌شود تابشی خودبخودی داشته باشد که طیف این تابش به صورت زیر می‌باشد [۱۹]:

$$\frac{d^2W}{d\Omega d\omega} = \frac{e^2 \omega^2}{4\pi^2 c^3} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \hat{n} \times (\hat{n} \times \vec{v}) \cdot \exp[i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})] dt \right|^2 \quad (6)$$

به طوری که  $d^2W/d\Omega d\omega$  انرژی تابشی در واحد زاویه فضایی  $d\Omega$  در واحد بازه فرکانسی  $d\omega$  در جهت بردار  $\hat{n}$  است. از آن جا که تابش از یک الکترون شتابدار به طور عمده در جهت حرکت الکترون است، انرژی تابشی در راستای محور  $z$  را محاسبه می‌کنیم. هم‌چنان از آن جا که الکترون تنها در منطقه برهمکنش شتابدار می‌شود، انتگرال در این محدوده محاسبه می‌شود. بنابراین رابطه (۶) به صورت زیر خلاصه می‌شود:

$$\frac{d^2W}{d\Omega d\omega} = \frac{e^2 \omega^2}{4\pi^2 c^3} \left| \int_0^{\frac{2\pi N_w}{\beta_0 \omega_{w1}}} -v_x \hat{e}_x \exp[(\omega t - \kappa z)] dt \right|^2 \quad (7)$$

که  $N_w$  تعداد تناوب‌های ویگلر است. با جای‌گذاری سرعت عرضی از معادله (۳) و موقعیت طولی از رابطه (۵) خواهیم داشت:

$$\frac{d^2W}{d\Omega d\omega} = \frac{e^2 \omega^2}{4\pi^2 c \gamma_0^2} \left| \int_0^{\frac{2\pi N_w}{\beta_0 \omega_{w1}}} T \hat{e}_x dt \right|^2 \quad (8)$$

به طوری که

$$T = \frac{e^{-i\omega\beta_0 t}}{2i} \exp[A] \left( \Omega_{w_3} e^{i(\beta_0\omega_{w_3} + \omega)t} - \Omega_{w_3} e^{-i(\beta_0\omega_{w_3} - \omega)t} - \Omega_{w_1} e^{i(\beta_0\omega_{w_1} + \omega)t} + \Omega_{w_1} e^{-i(\beta_0\omega_{w_1} - \omega)t} \right)$$

و

$$A = -i\kappa \frac{1}{8\gamma_0^2} \left[ \frac{\Omega_{w_3}^2 \sin 2\beta_0 \omega_{w_3} t}{\beta_0 \omega_{w_3}} + \frac{\Omega_{w_1}^2 \sin 2\beta_0 \omega_{w_1} t}{\beta_0 \omega_{w_1}} \right] + \frac{\Omega_{w_1} \Omega_{w_3}}{2\gamma_0^2} \left[ \frac{\sin \beta_0 (\omega_{w_3} - \omega_{w_1}) t}{\beta_0 (\omega_{w_3} - \omega_{w_1})} - \frac{\sin \beta_0 (\omega_{w_3} + \omega_{w_1}) t}{\beta_0 (\omega_{w_3} + \omega_{w_1})} \right]$$

در نتیجه خواهیم داشت

$$e^A = e^{-ias \sin 2\beta_0 \omega_{w_3} t} e^{-ib \sin 2\beta_0 \omega_{w_1} t} e^{-ics \sin \beta_0 (\omega_{w_3} - \omega_{w_1}) t} e^{id \sin \beta_0 (\omega_{w_3} + \omega_{w_1}) t}$$

به طوری که

$$a = \frac{c\kappa}{8\beta_0 \omega_3} \left( \frac{\Omega_{w_1} \Omega_{w_3}}{\gamma_0} \right)^2, b = \frac{\Omega_{w_1}^2 \kappa}{8\gamma_0^2 \beta_0}, c = \frac{\Omega_{w_1} \Omega_{w_3} \kappa}{2\gamma_0^2 \beta_0 (\omega_{w_3} - \omega_{w_1})}, d = \frac{\Omega_{w_1} \Omega_{w_3} \kappa}{2\gamma_0^2 \kappa \beta_0 (\omega_{w_3} + \omega_{w_1})}$$

با استفاده از رابطه حاکم در معادلات بسل  $\exp[i\alpha \sin \beta] = \sum_n J_n(\alpha) e^{in\beta}$  و با تعریف پارامتر بدون بعد  $\nu = (1 - \beta_p)\omega - h\beta_0\omega_{w_1} - f\beta_0\omega_{w_3}$  به عنوان پارامتر قابل تنظیم<sup>۴</sup> فرکانسی خواهیم داشت:

(۹)

$$T = -2i \sum_{n,m,p,q} J_n(-a) J_m(-b) J_p(-c) J_q(d) \left\{ X_i e^{i(2m-p+q+h)\beta_0\omega_{w_3}t} (e^{i(2n+1+p+q+f)\omega_{w_1}t} - e^{i(2n-1+p+q+f)\omega_{w_1}t}) - e^{i(2n+p+q+f)\omega_{w_1}t} (e^{i(2m+1-p+q+h)\beta_0\omega_{w_3}t} - e^{i(2m-1-p+q+h)\beta_0\omega_{w_3}t}) \right\}$$

که در آن که  $h$  و  $f$  اعداد صحیح هستند که به ترتیب مضارب صحیحی از فرکانس ویگلر و هارمونیک ویگلر را نشان می‌دهند. در این صورت حاصل معادله (۸) به شکل زیر می‌شود:

$$\frac{d^2W}{d\Omega d\omega} = \frac{e^2 \omega_R^2}{16\pi^2 c \gamma_0^2} \left| G_X \hat{e}_x \int_0^{\frac{2\pi N_w}{\beta_0 \omega_{w_1}}} e^{i\nu t} dt \right|^2, \tag{10}$$

به طوری که:

$$G_X = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} J_n(-a) J_m(-b) J_p(-c) J_q(d) \left[ X_i (\delta_{-h,2m-p+q} \delta_{-f,2n+p+q+1} - \delta_{-h,2m-p+q} \delta_{-f,2n+p+q-1}) - (\delta_{-h,2m-p+q+1} \delta_{-f,2n+p+q} - \delta_{-h,2m-p+q-1} \delta_{-f,2n+p+q}) \right]$$

<sup>4</sup> Detuning parameter

و در نهایت طیف تابش خودبخودی به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{d^2W}{d\Omega d\omega} = \frac{e^2 N_w^2 \omega_R^2 G_x^2}{4c \gamma_0^2 \beta_0^2 \omega_{w1}^2} \frac{\sin^2\left(\frac{\pi N_w V}{\beta_0 \omega_{w1}}\right)}{\left(\frac{\pi N_w V}{\beta_0 \omega_{w1}}\right)^2}. \quad (11)$$

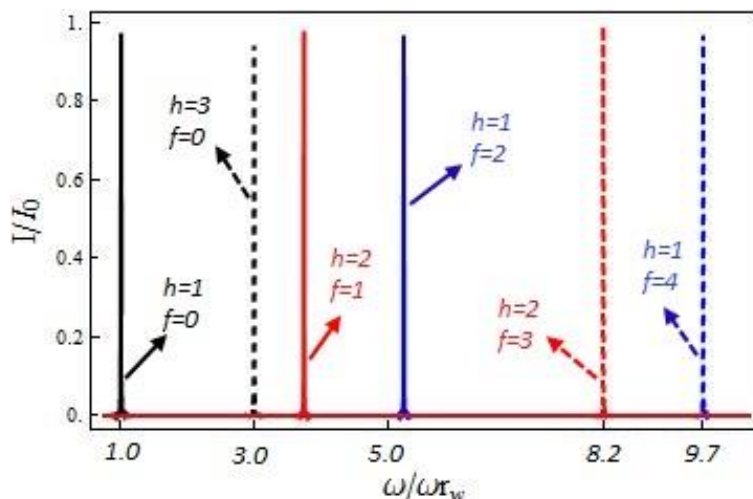
به راحتی دیده می‌شود که وقتی  $f = 0$ ،  $G_x$  فقط برای مضارب فرد  $h$  مخالف صفر است و به طور مشابه اگر  $h = 0$  فقط در هارمونیک‌های فرد  $f$  تابش خودبخودی محوری مخالف صفر است. در واقع با توجه به توابع دلتای دیراک موجود در  $G_x$ ، این عبارت در صورتی مخالف صفر است که

$$\left. \begin{aligned} -h &= 2m - p + q \\ -f &= 2n + p + q + 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow h + f = -2(m + n + q) - 1$$

یا

$$\left. \begin{aligned} -h &= 2m - p + q \\ -f &= 2n + p + q - 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow h + f = -2(m + n + q) + 1$$

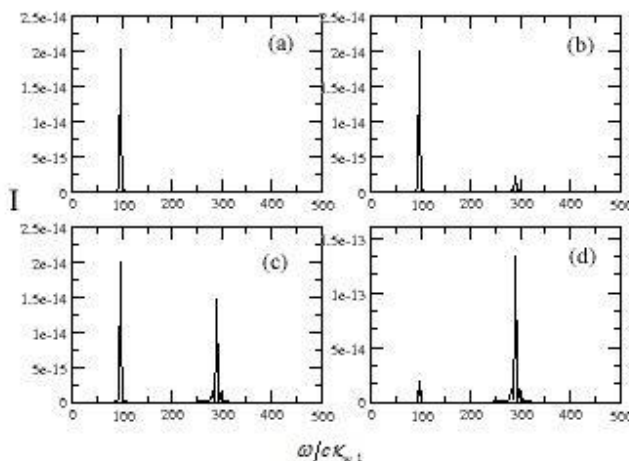
یعنی مجموع  $h$  و  $f$  عددی فرد باشد. بنا براین اگر هر کدام از  $h$  یا  $f$  زوج و دیگری فرد باشد هم  $G_x$  مخالف صفر خواهد شد، مثلاً در  $h = 2$  و  $f = 1$  این امر به خاطر حضور ویگنر هارمونیک است که منجر به جفت‌شدگی فرکانس‌ها و وجود تابش محوری در فرکانس‌هایی با مضارب زوج از فرکانس ویگنر اصلی یا هارمونیک نیز می‌شود. بنابراین طیف تابش خودبخودی قله‌هایی در  $(h\beta_0\omega_{w1} + f\beta_0\omega_{w3}) / (1 - \beta_p)$  به صورت ترکیباتی از فرکانس‌های ویگنر اصلی هارمونیک خواهد داشت که در شکل (۳) نشان داده شده است. در این شکل تابش خودبخودی نرمالیزه شده در چند مقدار مختلف  $h$  و  $f$  رسم شده است. تغییرات فرکانس روی محور افقی نیز به فرکانس ویگنر اصلی ( $h = 1, f = 0$ ) بی‌بعد شده است. شدت تابش در هر یک از این فرکانس‌ها را می‌توان با تغییر پارامترهای الکترون و ویگنرها تغییر داد که در بخش بعد نشان داده شده است. پهنای خطوط طیف بستگی به طول منطقه برهمکنش دارد. در این نمودارها، برای مقادیر  $f$  مخالف صفر،  $\Omega_{w3} = 1$  در نظر گرفته شده است.



شکل ۳: فرکانس‌های تشدید تابش خودبخودی برای مقادیر مختلف  $h$  و  $f$  ( $I_0 = e^2 N_w^2 \omega_R^2 / 4c \gamma_0^2 \beta_0^2 \omega_{w1}^2$ ) و  $(\omega_w = \beta_0 \omega_{w1} / (1 - \beta_p))$

### محاسبه عددی تابش خودبه‌خودی

مجموعه معادلات (۲) دسته معادلات دیفرانسیل جفت شده‌ای را تشکیل می‌دهند که حرکت الکترون را توصیف می‌کند. در این بخش، با حل عددی این معادلات به روش رانگ-گوتا و جای‌گذاری آن‌ها در معادله (۶) و محاسبه عددی این انتگرال به روش سیمپسون، طیف تابش خودبخودی را به طور عددی محاسبه کرده‌ایم. در شکل (۴) طیف این تابش به ازای مقادیر مختلف میدان ویگلر اصلی و مؤلفه هارمونیک آن نشان داده شده است. همان‌طور که انتظار می‌رود تابش در فرکانس اصلی و هارمونیک سوم خودنمایی می‌کند. افزایش شدت تابش هارمونیک سوم با افزایش میدان مؤلفه هارمونیک سوم ویگلر نیز



شکل ۴: تابش خودبخودی نرمالیزه شده برای  $a) \alpha = 0$ ,  $b) \alpha = 0.4$ ,  $c) \alpha = 1.0$  و  $d) \alpha = 3.0$



### نتیجه‌گیری

مسیر حرکت الکترون که به طور محوری وارد لیزر الکترون آزاد با ویگلر تخت تعمیم یافته می‌شود بررسی شده و نشان داده‌ایم که الکترون تحت تأثیر مؤلفه هارمونیک میدان ویگلر مسیر پیچیده‌ای طی می‌کند. نوسانات عرضی الکترون در ترکیبی از فرکانس‌های میدان اصلی ویگلر و میدان هارمونیک آن دیده می‌شود که منجر به تولید هارمونیک‌های جدیدی می‌شود. این هارمونیک‌ها در طیف تابش خودبخودی FEL با ویگلر تعمیم یافته که به طور تحلیلی محاسبه شده است خود را نشان می‌دهند. بنابراین با تنظیم اندازه میدان ویگلر و میدان هارمونیک ویگلر می‌توان به فرکانس‌های تشدید جدیدی دست یافت و عملکرد لیزر را در محدوده وسیع‌تر فرکانسی گسترش داد. با محاسبه عددی تابش خودبخودی سیستم مورد نظر، ظهور تابش هارمونیک سوم در طیف فرکانسی تابش را نشان داده‌ایم که این امر با نتایج تحلیلی سازگار است. رشد تابش در فرکانس هارمونیک سوم را با افزایش میدان هارمونیک سوم نیز نشان داده‌ایم.

### منابع

1. W. Colson, "The nonlinear wave equation for higher harmonics in free-electron lasers," *IEEE J. Quantum Electron.*, vol. 17, pp. 1417-1427, 1981.
2. W. B. Colson, "Free-electron lasers operating in higher harmonics," *Phys. Rev. A*, vol. 24, pp. 639-641, 1981.
3. H. P. Freund, *et al.*, "Nonlinear harmonic generation in free-electron lasers," *IEEE J. Quantum Electron.*, vol. 36, pp. 275-281, 2000.
4. H. P. Freund, *et al.*, "Harmonic generation in free-electron lasers," *Phys. Rev. A*, vol. 36, pp. 3218-3221, 1987.
5. Z. Huang and K.-J. Kim, "Nonlinear harmonic generation of coherent amplification and self-amplified spontaneous emission," *Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. A*, vol. 475, pp. 112-117, 2001.
6. B. W. J. McNeil, *et al.*, "Harmonic Lasing in a Free-Electron-Laser Amplifier," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 96, p. 084801, 2006.
7. F. Bazouband and B. Maraghechi, "Improvement of Nonlinear Harmonics in Free Electron Laser with Planar Wiggler" *Phys. Plasmas* vol. 19, pp. 113106-1-8, 2012.

8. M. G. Kong, "A low voltage waveguide free electron laser based on a longitudinal interaction mechanism," *Opt. Commun.*, vol. 141, pp. 48-52, 1997.
9. A. Doria, *et al.*, "The ENEA activity on compact far infrared FELs," in *IVEC '09. IEEE International*, Rome, 2009, pp. 544-545.
10. H. Mehdian, *et al.*, "Electron trajectories in a free-electron laser with planar wiggler and ion-channel guiding," *Phys. Plasmas*, vol. 8, pp. 3776-3780, 2001.
11. F. Bazouband, B. Maraghechi, "Nonlinear third harmonic radiation in thermal free electron laser with modified wiggler"; *J. Plasma physics*, 18, (2015).
12. M. Asakawa, *et al.*, "Higher harmonic generation in a modified wiggler magnetic field," *Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. A*, vol. 318, pp. 538-545, 1992.
13. G. Mishra, *et al.*, "Spectral properties of bi-harmonic undulator radiation," *Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. A*, vol. 603, pp. 495-503, 2009.
14. F. Sircilli, *et al.*, "Design of a hybrid undulator for free-electron lasers," *IEEE Trans. on Magn.*, vol. 37, pp. 3810-3813, 2001.
15. J. Hussain, *et al.*, "Effect of two-peak beam energy spread on harmonic undulator radiation and free-electron laser gain," *Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. A*, vol. 608, pp. 344-350, 2009.
16. M. Asakawa, *et al.*, "Development of a modified wiggler for higher harmonic lasing of a free-electron laser," *Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. A*, vol. 358, pp. 399-402, 1995.
17. M. Asakawa, *et al.*, "Multi-order harmonic lasing with a modified wiggler," *Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. A*, vol. 375, pp. 416-419, 1996.
18. N. Nakao, *et al.*, "FEL experiment of the 5th harmonic generation with a modified wiggler," *Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. A*, vol. 407, pp. 374-379, 1998.
19. J. D. Jackson, "Classical Electrodynamics" 5<sup>th</sup> edition, New York: Wiley, (1998).