نشریه پژوهش های نوین فیزیک: جلد ۱۰، شماره ۱، بهار و تابستان ۱۴۰۴

هامیلتونی نسبیتی و نظریه‌های مرتبط

ابوالفضل جعفری[1]

[1*]گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه شهرکرد، شهرکرد، ایران

اطلاعات مقاله

تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۰۶/۲۳
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۰۷/۲۷
تاریخ چاپ: ۱۴۰۴/۰۸/۰۳

شاپای چاپی: 2588-493x
شاپای الکترونیکی: 2588-4921

* نویسنده مسئول
jafari-ab@sku.ac.ir

چکیده

روش پیشنهادی ما به ما این امکان را می‌دهد که هامیلتونی نسبیتی را از یک لاگرانژی داده شده در یک چارچوب نسبیتی استخراج کنیم. ما نشان می‌دهیم که یک اصلاح ساده از لاگرانژی، که اثرات نسبیتی را در بر می‌گیرد، ما را قادر می‌سازد به این هدف دست یابیم. با استفاده از قابلیت‌های هامیلتونی نسبیتی برای توصیف نظریه میدان، می‌توانیم به طور رسمی نظریه‌ی میدان‌های اسکالر و اسپینور را با در نظر گرفتن تکانه‌های متعارف و مکانیکی استخراج کنیم. بنابراین، ریشه مشترک این نظریه‌ها روشن می‌شود. پس از یافتن هامیلتونی نسبیتی، معادلات حرکت هامیلتونی را به دست می‌آوریم و براکت پوآسون را بر اساس آنها تعمیم می‌دهیم. پس از به دست آوردن هامیلتونی نسبیتی، می‌توانیم معادلات حرکت هامیلتونی را استخراج کرده و از آنها برای تعمیم براکت پوآسون استفاده کنیم. ما فضای فاز را گسترش می‌دهیم تا فضای فاز دوگان را برای براکت پوآسون نسبیتی به طور دقیق تعریف کنیم. این مکانیزم نیاز به تعریف مجدد مشتقات در هر دو فضای فاز اصلی و دوگان دارد. الزام اینکه یک فضای فاز کامل، ناوردای لورنتسی باشد، مستلزم اصلاح مکانیک کلاسیک است. این تحقیق عملاً به هامیلتونی نسبیتی می‌رسد و برپایه آن لاگرانژیِ رابطه پراکندگی مشخص شده در نظریه DSR را استخراج و ارائه می‌کند.

واژگان کلیدی: سیستم‌های نسبیتی، لاگرانژی و هامیلتونی نسبیتی، نظریه میدان‌های بوزونی و فرمیونی، تبدیل لژاندر، فضای دوگان، براکت پوآسون نسبیتی

مقدمه

لاگرانژینِ سامانه، تابعی در فضای پیکربندی است. فضای پیکربندی اصولا یک فضای فاقد متریک پیش تعریف است. هر متریک فضای پیکر بندی اصولا ربطی به متریک فضا – زمان ندارد. اما در محاسبه تغییرات کمیت‌های تعریف شده در فضای پیکربندی از فرم تغییرات آن‌ها در فضا - زمان و براساس متریک آن استفاده می‌شود. این مطلب در باره فضای فاز، توابع و تغییرات کمیت‌های روی آن نیز صدق می‌نماید. بنابراین وردش مولفه‌های فضای فاز یا فضای پیکربندی به صورت مستقیم از فضای اصلی آن‌ها حاصل می‌شود. این مطلب تغییر شگرفی در گسترش براکت پوآسون ایجاد خواهد نمود.

پیش از این، براکت‌های پواسون تعریف شده در مکانیک کلاسیک نقش کلیدی در ظهور فیزیک مدرن ایفا کرده‌اند. مکانیک کوانتومی یکی از مهمترین این موارد است. مکانیک کوانتومی بر اساس ساختار بنیادینِ براکت پواسون توسعه داده شد و به نتایج قابل توجهی دست یافته است که با نتایج حاصل از مکانیک کلاسیک تفاوت قابل توجهی دارد. مکانیک کلاسیک به صورت هم ارز شامل رهآورد لاگرانژی و هامیلتونی است. در حالیکه در رژیم نسبیتی خبری از مکانیزم هامیلتونی نیست. یکی از دلایلِ دشواری هامیلتونی در توصیف سیستم‌های لورنتسی، نقش کوتاه اما مهم براکت پواسون و ناسازگاری آن با اصول نسبیت بود. ممکن است تلاش‌هایی برای رفع این ناکارآمدی انجام شده باشد. واضح است که فضای فاز و رابطه پوآسون تعریف شده رسمی همووردای لورنتسی نیستند و در یک موقعیت غیر نسبیتی خوش رفتار نیستند. چندین دلیل روشن برای این ناسازگاری وجود دارد:

[Downloaded from jmrph.khu.ac.ir on 2026-06-26]

تعریف اولیه ساختار فضای فاز کلاسیک، تعریف اولیه ضرب داخلی روی فضای فاز و تعریف نرخ تغییر -زمان- در معادلات کلاسیک. در برخی مراجع، مانند [1,2] تلاش‌هایی برای حل بعضی از این مشکلات با پیشنهاد جایگزینی مختصات متعارف در نظریه اولیه انجام شده است؛ با این حال، این روش‌ها را نمی‌توان روش رسمی در نظر گرفت. هدف آنها ایجاد مختصات جدید و سازگار از طریق تبدیلات لورنتس به جای تغییر ساختار فضای فاز است. همچنین قابل توجه است که در مراجعی مانند [3,4]، به تغییر در کیفیت نرخ تغییر مختصات فضای فاز اشاره شده است. تغییر اخیر تضمین می‌کند که تمام مشتقات زمانی باید به مشتقات زمان ویژه تبدیل شوند. این پیشنهاد در تحقیق حاضر نیز همچنان یکی از عناصر کلیدی موفقیت در این زمینه است. هرچند این هماهنگی با آرایه‌های نسبیتی، نمی‌تواند به مسئله اصلی چگونگی رفتار فضای فاز، هامیلتونی و معادلات حرکت تحت تبدیلات گروه لورنتس بپردازد. شاید به همین دلیل است که برخلاف نقش پررنگ لاگرانژی، هامیلتونیِ سیستم تاکنون نقش اساسی در رویکرد نسبیتی مسائل ایفا نمی‌کند. زیرا، این روش‌ها در حل مسئله نسبیتی هامیلتونی موفق نبوده‌اند و تکامل نیافته‌اند. بدیهی است که نتایج این مطالعه، یعنی ساخت هامیلتونی نسبیتی و براکت پوآسون تعمیم‌یافته، تحت شرایط مشخصی، هرچند تقریبی، به "جابجاگر پوآسون نسبیتی" منجر می‌شود و خواهیم دید که از این منظر با مکانیک کوانتومی غیر نسبیتی تداخلی ندارد. مکانیک کوانتومی یک نظریه مجانبی روی ابرسطوح ریمانی است و انتظار می‌رود که پس از پذیرش جابجاگر پوآسون، فیزیک در ابرسطح‌های ریمانی به همان روال قبل به درستی رفتار کند. بنابراین، پیامدهای این فرآیند مستقیماً در حوزه مکانیک کوانتومی اعمال نخواهد شد، به این معنی که کوانتش اول، دست نخورده باقی می‌ماند. در کار پیشِ رو، ما سعی می‌کنیم با گسترش و تعریف مجدد سه‌گانه‌های ذکر شده در بخش قبلی، مکانیسمی برای حفظ هموردایی لورنتسی توسط توزیع جدید پوآسون پیدا کنیم.

تمام نظریه‌های پیشین فیزیک، نظیر میدان‌ها، منطبق بر رفتار لاگرانژی در فضای پیکربندی قرار دارند. از نظر ما، دلیل این مطلب به در دسترس نبودن هامیلتونی این نظریه‌ها باز می‌گردد. یکی از دلایل نبودن هامیلتونی آن‌ها نیز به نسبیتی نشدن هامیلتونی مربوط است. چراکه اولین قدم در تعریف هامیلتونی نسبیتی به پوچ شدن آن می‌انجامد. برای رهایی از این دور باطل، با فرض در اختیار داشتن لاگرانژی و بدون از دست دادن کلیت مسئله لاگرانژیِ فضای پیکربندی را تعمیم می‌دهیم. در این مقاله، متریک قابل ارجاع، مینکوفسکی و به صورت $\eta=(+1,-1,-1,-1)$ در نظر گرفته می‌شود.

۱-۱ لاگرانژی‌ها و هامیلتونی‌های گسترش یافته

سوال مهمی هست و آن این‌که لاگرانژی چیست؟ با نگاهی به لاگرانژی کلاسیکی مشخص است که لاگرانژی یک کمیتِ مسیر وابسته مربوط به ذره است که وردش آن بازاء مسئله داده شده منجر به اکسترمم شدن کنش ذره می‌گردد. برای هر چهارچوب فیزیکی، لاگرانژی شاملِ ناوردای آن نظریه فیزیکی است. بخش ناوردای لاگرانژی کلاسیکی که تحت نسبیت گالیله‌ای ناورداست، زمان است. پس کمیت مشتق‌پایه آن -زمان- اسکالر گالیله‌ای است. لاگرانژی در مسیر ذره نوشته نمی‌شود بلکه به مسیر ذره می‌رسد. زمانی‌که خمینه مورد بحث دارای خمیدگی باشد کمی توجه لازم است. نکته عبارت آخر در این است که تغییرات یک بردار روی خمینه دلخواه منطبق بر قانون انتقال موازی است. اگر σ خم ارتباطی بین دو فضای مماس متعلق به دو نقطه از فضا – زمان باشد، به علت تاثیر خمیدگی فضا – زمان و با ورود مفهوم انتقال موازی مشتق‌ها لزوما به صورت مشتق کواریانت خواهند بود. نرخ تغییر کمیتهای اسکالر - مانند لاگرانژی – به تغییرات δq^{κ} و $\delta q^{\kappa}_{;\alpha}$ مربوط خواهد بود. نتیجه مهم بند بالا اینکه، نرخ تغییر کمیتها متفاوت از تغییر کمیت‌هاست. در حالیکه تغییرات δq^{κ} و $\delta q^{\kappa}_{;\alpha}$ به صورت معمولی و هموردا خواهد بود و این نتیجه روی فرم لاگرانژی نیز اعمال می‌گردد. خلاصه آن چنین است [5]:

یعنی، $\delta q^{\kappa}_{;\alpha}=\delta q^{\kappa}_{,\alpha}+\Gamma^{\kappa}_{\alpha\lambda}\,\delta q^{\lambda}$. هرگاه σ یک اسکالر لورنتسی باشد و لاگرانژی نسبیتی را به صورت $L(q,q_{;\sigma})$ در نظر بگیریم، $p^{\sigma}_{\alpha}=\dfrac{\partial L}{\partial q_{\alpha;\sigma}}$ برابر تکانه کانونیک خواهد بود. از تبدیل لژاندر لاگرانژی به هامیلتونی زیر می‌رسیم

$$H(q,p)=p^{\sigma}_{\alpha}g^{\alpha\beta}q_{\beta;\sigma}-L(q,q_{;\sigma}), \quad (۱)$$

که بازاء توابع همگن لاگرانژ، یک کمیت پوچ خواهد شد. در هر صورت هامیلتونی تابعی از سرعت‌ها نخواهد بود و این مستقل از پوچ شدن آن است. از آن‌جا که هامیلتونی تابع سرعت نیست، شرط زیر همواره صادق است:

[Downloaded from jmrph.khu.ac.ir on 2026-06-26]

$$\frac{\partial}{\partial q_{\kappa;\sigma}}H(q,p)=0=p_\alpha^\sigma g^{\alpha\beta}\delta_{\beta\kappa}-\frac{\partial}{\partial q_{\kappa;\sigma}}L(q,q_{;\sigma}),$$

که تعریف تکانه سیستم است. در عمل وارون، واضح است که تبدیل لژاندرِ هامیلتونی به لاگرانژی می‌انجامد:

$$L(q,q_{;\sigma})=p_\alpha^\sigma g^{\alpha\beta}q_{\beta;\sigma}-H(q,p),$$ و بطور مشابه داریم:

$$\frac{\partial}{\partial p_\kappa}L(q,q_{;\sigma})=0=\delta_{\alpha\kappa}g^{\alpha\beta}q_{\beta;\sigma}-\frac{\partial}{\partial p_\kappa}H(q,p),$$

که رابطه‌ای معروف را نشان می‌دهد.

الف- ذره آزاد نسبیتی:

در ادامه اگر لاگرانژی نسبیتی را به صورت $L=m_0(q_{;\sigma}^\alpha g_{\alpha\beta}q_{;\sigma}^\beta)^{\frac{1}{2}},$ بگیریم و تکانه همیوغ را برای آن محاسبه کنیم $p_\kappa^\sigma=\frac{\partial L}{\partial q_{;\sigma}^\kappa}=m_0\frac{g_{\kappa\beta}q_{;\sigma}^\beta}{(q_{;\sigma}^\mu g_{\mu\nu}q_{;\sigma}^\nu)^{\frac{1}{2}}},$ ، هنوز هامیلتونی پوچ خواهد بود. برای رسیدن به یک نظریه نسبیتی همراه با هامیلتونی، تبدیل بی تاثیر زیر، (نتیجه ورود این جمله در لاگرانژی جایگذینی انرژی جنبشی به جای انرژی ذره است) را در لاگرانژی وارد می نماییم:

$$L\to L-m_0$$

نشان می‌دهیم که اضافه شدن جمله‌ای از فضای فاز تاثیری در مسیر مطالعه لاگرانژی نخواهد داشت اما نتیجه اعمال آن رسیدن به هامیلتونی نسبیتی مسئله است. نکته‌های مهم در این مکانیزم به قرار زیر است:

۱- به مانند لاگرانژی سیستم نسبیتی آزاد، هامیلتونی سیستم نسبیتی نیز کمیتی ناوردای لورنتسی در فضای فاز است [6].

۲- هرگونه تغییر در رابطه جرم و تکانه به صورت مستقیم در هامیلتونی سیستم وارد می‌شود.

۳- m_0 عبارت وزنی در رابطه تکانه مکانیکی خواهد بود،

$$.m_0\frac{\partial q^\alpha}{\partial\tau}=\pi^\alpha$$

٤- هرگونه تغییر در تعریف m_0، تنها در هامیلتونی وارد می‌شود.

به این ترتیب هامیلتونی برابر است با

$$H=m_0\equiv(\pi_\mu g^{\mu\nu}\pi_\nu)^{\frac{1}{2}},\quad(۲)$$

رابطه (۲) از تبدیل لژاندر، دارای معادلات حرکت

$$\frac{\partial H}{\partial p_\kappa}=g^{\kappa\beta}q_{\beta;\sigma}=\frac{g^{\kappa\beta}p_\beta}{m_0},$$

می‌باشد. برای استخراج معادلات هامیلتون، در ابتدا فرض می‌کنیم فضا – زمان تخت باشد. به این ترتیب وردش رابطه (۱) کار ساده‌ای خواهد بود:

$$\delta H(q,p)=(\delta p_\alpha^\sigma)g^{\alpha\beta}q_{\beta,\sigma}+p_\alpha^\sigma g^{\alpha\beta}(\delta q_{\beta,\sigma})-\delta L(q,q_{,\sigma}),$$

نتیجه ساده‌سازی آن به صورت عبارت زیر خواهد بود

$$\nabla H(q,p).\delta\eta=(\delta p_\alpha^\sigma)g^{\alpha\beta}q_{\beta;\sigma}-\nabla L(q,q_{;\sigma}).\delta q,$$

در نهایت داریم:

$$\nabla H(q,p).\delta q=-\nabla L(q,q_{;\sigma}).\delta q,$$
$$\nabla H(q,p).\delta p=(\delta p_\alpha^\sigma)g^{\alpha\beta}q_{\beta;\sigma},\quad(۳)$$

که معادله (۳) قبلا استخراج شده است. اکنون می‌توان خلاصه بخش آخر را به صورت زیر بیان کرد:

هرگاه لاگرانژی به عنوان تابعی در فضای پیکربندی مشخص باشد و شرط تکانه (ساده ترین مورد: $(\pi_\mu g^{\mu\nu}\pi_\nu)^{\frac{1}{2}}=m_0,$) داده شده باشد، تبدیل لژاندر از لاگرانژی برای رسیدن به هامیلتونی چنین خواهد بود

$$H(q,p)=p_\alpha^\sigma g^{\alpha\beta}q_{\beta;\sigma}-L(q,q_{;\sigma})+m_0,$$

از آنجاکه هامیلتونی تابع سرعت‌ها نیست، شرط $\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_{\alpha;\sigma}}=0,$ به دست از $p_\alpha^\sigma=\frac{\partial L(q,q_{;\sigma})}{\partial q_{\alpha;\sigma}},$ می‌آید. این قسمت ابهامی ندارد چراکه با معلوم بودن لاگرانژی، مشتق‌گیری منتج به تکانه دست‌آورد مشخصی است. حالا، اگر فضا – زمان تخت نباشد، مسئله دچار تغییر خواهد شد چراکه وردش متریک اهمیت دارد. می‌دانیم که مشتق کواریانت متریک صفر است: پس $\partial_\mu g^{\alpha\beta}+g^{\nu\beta}\Gamma_{\nu\mu}^\alpha+g^{\alpha\nu}\Gamma_{\nu\mu}^\beta=0,$ با جایگذاری این عبارت در وردش هامیلتونی (۱) داریم

$$\delta H(q,p)=(\delta p_\alpha^\sigma)g^{\alpha\beta}q_{\beta;\sigma}+p_\alpha^\sigma g^{\alpha\beta}(\delta q_{\beta;\sigma})-\delta L(q,q_{;\sigma})+p_\alpha^\sigma(\delta g^{\alpha\beta})q_{\beta;\sigma},$$

یا

$$\nabla H(q,p).\delta\eta=(\delta p_\alpha^\sigma-p_\nu^\sigma\Gamma_{\alpha\varsigma}^\nu\delta q^\varsigma)g^{\alpha\beta}q_{\beta;\sigma}$$

[Downloaded from jmrph.khu.ac.ir on 2026-06-26]

$+p^{\sigma}_{\alpha} g^{\alpha\beta}(\delta q_{\beta;\sigma} - q_{\nu;\sigma}\Gamma^{\nu}_{\beta\varsigma}\delta q^{\varsigma}) - \delta L(q,q_{;\sigma}),$ رابطه آخر نشان می‌دهد که وردش کمیات سرعت و تکانه به صورت هموردا در خواهد آمد. با افزودن $\pm L(q,q_{;\sigma})\Gamma^{\mu}_{\mu\varsigma}\delta q^{\varsigma}$ به عبارت طرف راست و دسته بندی مقادیر فوق، داریم

$$DH(q,p).\,\delta q + \nabla H(q,p).\,\delta p = \delta p^{\sigma}_{\alpha}\, g^{\alpha\beta} q_{\beta;\sigma} - DL(q,q_{;\sigma}).\delta q,$$

معادلات حرکت نیز به صورت

$$DH(q,p) = -DL(q,q_{;\sigma}),$$
$$\nabla_p H(q,p) = q_{;\sigma},$$

خواهند بود. جالب است که آهنگ تغییرات مکان – زمان هامیلتونی به صورت هموردا (مشتق کواریانت) است. این مطلب حکایت از آن دارد که معادلات حرکت اویلر - لاگرانژ نیز به همین نتیجه خواهند رسید:

$$D_{\kappa}L(q,q_{;\sigma}) - D_{\sigma}\frac{\partial L(q,q_{;\sigma})}{\partial q^{\kappa}_{;\sigma}} = 0, \quad (۴)$$

رابطه (۴) تاکید دارد که فرم اصلی کنش این بخش به صورت زیر خواهد بود: $s = \int d\sigma \sqrt{-g}\, L(q,q_{;\sigma})$. بخش وردش متریک $\delta\sqrt{-g} = \Gamma^{\lambda}_{\kappa\lambda}\sqrt{-g}\,\delta q^{\kappa}$ به رابطه نهایی اویلر – لاگرانژ خواهد رسید. این نتایج قابل مقایسه با حالتی خواهد بود که فضا – زمان مینکوفسکی است:

$$\nabla_q H(q,p) = -\nabla_q L(q,q_{;\sigma}) = -p_{;\sigma},$$
$$\nabla_p H(q,p) = q_{;\sigma},$$

ب- سیستم‌هایی با متغیر دینامیکی غیر از مختصات:

در بخش قبل لاگرانژی در دستگاه ذره نوشته شده است. اما اگر لاگرانژی در دستگاه دیگری بیان شود مسئله متفاوت می‌شود. این مسئله توصیف سیستم ذرات در دستگاهی غیر از دستگاه ذره و سیستمهایی نظیر میدان‌ها یا است، سیستم‌هایی که در آنها متغیرهای دیگر، یا توابع موج متغیر دینامیکی مسئله هستند. رفتار این سیتم‌ها همانند رفتار سیستم ذرات است با ناوردایی زمان یا زمان ویژه توصیف می‌شوند، با این تفاوت که در مورد این سیستم‌ها آنچه مهم است تابعیت توصیف کننده آنهاست. الآن $q^{i}(t)$ یا $q^{\mu}(\tau)$ مورد تحقیق نیست بلکه یافتن $\theta^{\mu}(q)$ مهم است. برای رسیدن به نظریه مورد نظر، حالت زیر را بررسی می‌کنیم. لاگرانژی را صرفا یک تابع در فضای مماس می‌گیریم و خواهیم دید که رفتار آن متفاوت از منظر قبلی است. در بخش قبلی لاگرانژی کمیتی در مسیر ژئودزیک بود و الآن لاگرانژی در فضای پیکربندی نوشته شده است و تابع تمام مولفه‌های فضا – زمان است. این بخش شامل بندهای زیر است:

۱- سنجه های وابسته به تغییرات محلی هستند. همچنین سنجه‌ها تحت تاثیر مفهوم انتقال موازی قرار نمی‌گیرند.

۲- آهنگ تغییرات فرم‌ها متناسب با مشتق کواریانت خواهد بود. این بند در مورد لاگرانژی و یا هر فرم رنک-صفر به صورت تغییرات معمولی است.

۳- مشتق‌گیری‌ها در امتداد ژئودزیک نیستند پس مشتق موارد برداری به صورت کواریانت خواهد بود.

٤- تغییرات هموردای کمیت های مستقل شاخص دار متعلق به فضای مماس مانند v^{κ} به صورت زیر داده می شود: $\Delta v^{\kappa} = \delta v^{\kappa} + v^{\alpha}\Gamma^{\kappa}_{\alpha\beta}\delta q^{\beta}$,

،

نکته در این است که همین تفاوت ایجاب می‌کند که تبدیل زیر در رفتار متغیرها لحاظ گردد: $f(q,q^{\kappa}_{,\sigma})\big|_{timepath} \to f(\theta,\theta^{\kappa}_{;\alpha})$ و معنی آن این است که تغییرات کمیت‌های مستقل براساس بند (۱) تا (۴) باشند. به این ترتیب و برای این حالت کنش چنین است: $s = \int m_0(\theta^{\kappa}_{;\alpha}\, g_{\kappa\lambda}\, \theta^{\lambda;\alpha})^{\frac{1}{2}}\sqrt{-g}\, d^n q,$. این نتیجه برای حالت کلی‌ترِ متریک، با احتساب تغییرات غیر دینامیکی دیفرانسیل حجم $\sqrt{-g}\, d^n q$ بصورت زیر جمع می‌شود $\delta(\sqrt{-g}\, L) \to \delta L\sqrt{-g} + L\,\delta\sqrt{-g}$. پس خواهیم داشت:

$$\delta(\sqrt{-g}\, L) \to L\frac{\partial(\sqrt{-g})}{\partial q^{\kappa}}\,\delta q^{\kappa} + \sqrt{-g}\,\frac{\partial L}{\partial \theta^{\kappa}_{;\alpha}}\delta\theta^{\kappa}_{;\alpha},$$

. نکته ای لازم به ذکر است و آن اینکه، تغییرات δq^{κ} در هر صورت به علت اینکه متغیر انتگرالگیری است، تاثیری در معادله حرکت ندارد. نرخ تغییر کمیتهای اسکالر - مانند لاگرانژی – به تغییرات $\delta\theta^{\kappa}_{;\alpha}$ و $\delta\theta^{\kappa}$ مربوط خواهد بود و براساس بند قبل، در سنجه های انتگرال کنش، تغییرات شاخص ها اهمیتی ندارد. نتیجه مهم بندهای بالا اینکه، نرخ تغییر کمیتها متفاوت از تغییر کمیت‌هاست. در حالیکه تغییرات $\delta\theta^{\kappa}_{;\alpha}$ و $\delta\theta^{\kappa}$ به صورت معمولی و هموردا خواهد

[Downloaded from jmrph.khu.ac.ir on 2026-06-26]

بود و این نتیجه روی فرم لاگرانژی نیز اعمال می‌گردد. خلاصه آن چنین است [5]:

$\delta\theta^{\kappa}_{;\alpha}=\delta\theta^{\kappa}_{,\alpha}+\delta\theta^{\beta}\Gamma^{\kappa}_{\beta\alpha}$. بنابراین، معادله حرکت اویلر - لاگرانژ به صورت $\frac{\partial}{\partial\theta^{\kappa}}L-D_{\lambda}p^{\lambda}_{\kappa}=0,$ خواهد بود. خلاصه آن برابر است با

$$\frac{\partial}{\partial\theta^{\kappa}}L-p^{\lambda}_{\kappa;\lambda}=0, \quad (۵)$$

می‌توان رابطه (۴) را بازاء یک مسیر، ساده کرد. این گفته همانند انتخاب زمان ویژه در دستگاه ذره است. پس بازاء کمیت اسکالر σ خواهیم داشت: $\frac{\partial}{\partial\theta^{\kappa}}L-p_{\kappa;\sigma}=0,$، که در آن از شاخص σ در تکانه صرفنظر شده است. همچنان، تکانه کانونیک و مکانیکی، π_{κ} و p_{κ}، قابل تعریف بوده و از تعریف اولیه لاگرانژی تعیین می‌شوند: $p^{\alpha}_{\kappa}=\frac{\partial L}{\partial\theta^{\kappa}_{;\alpha}},$ و بطور مشخص $p_{\kappa}=\frac{\partial L}{\partial\theta^{\kappa}_{;\sigma}},$ خواهد بود. بنابراین بازاء مورد خاص و با توجه به رابطه $\theta^{\kappa}_{;\tau}=\frac{\partial\sigma}{\partial\tau}\theta^{\kappa}_{;\sigma}$ می‌توان نوشت:

$$p_{\kappa}=m_0\frac{\partial}{\partial\theta^{\kappa}_{,\sigma}}(\theta^{\mu}_{;\sigma}g_{\mu\nu}\theta^{\nu}_{;\sigma})^{\frac{1}{2}}=m_0g_{\kappa\nu}\theta^{\nu}_{;\sigma}(\theta^{\mu}_{;\sigma}g_{\mu\nu}\theta^{\nu}_{;\sigma})^{-\frac{1}{2}}$$
$$=g_{\kappa\nu}m_0\theta^{\nu}_{;\tau},$$

بازاء جرم واحد، تکانه کانونی به صورت زیر به دست می‌آید [7,8]:

$$p_{\kappa}=g_{\kappa\nu}\theta^{\nu}_{,\tau}+g_{\kappa\nu}\theta^{\alpha}\Gamma^{\nu}_{\alpha\tau}=\pi_{\kappa}+g_{\kappa\nu}\theta^{\alpha}\Gamma^{\nu}_{\alpha\tau},$$

الاصول، می‌توان هامیلتونی را به صورت تبدیل لژاندرِ لاگرانژی پیشنهاد داد. با توجه به دو شاخصی بودن کمیت‌ها، می‌توانیم بنویسیم:

$$H=p^{\alpha}_{\kappa}g^{\kappa\lambda}\theta_{\lambda;\alpha}-L, \quad (۶)$$

از رابطه (۶) می‌توان معادلات هامیلتون را به دست آورد $\delta H=\delta p^{\alpha}_{\kappa}g^{\kappa\lambda}\theta_{\lambda,\alpha}+p^{\alpha}_{\kappa}g^{\kappa\lambda}\delta\theta_{\lambda,\alpha}-\delta L,$. دلیل نبودن جمله $p^{\alpha}_{\kappa}\delta g^{\kappa\lambda}\theta_{\lambda,\alpha}$ روشن است چراکه این وردش در فضای فاز میدان θ_{λ} رخ می‌دهد. مشخص است که با قرار دادن تعریف تکانه و دانستن اینکه تغییرات متغیر مستقل $\theta_{\alpha;\lambda}$، روی فضای مماس اتفاق می‌افتد، داریم

$$\nabla_{\theta}H(\theta,p_{\theta})=-\nabla L(\theta,\theta_{;\sigma})=-p_{;\sigma},$$
$$\nabla_{p_{\theta}}H(\theta,p_{\theta})=\theta_{;\sigma}, \quad (۷)$$

رابطه (۷) تکرار معادله حرکت از لاگرانژی است. لازم به یادآوری است که تاکید کنیم $m_0^2=\pi^2$ که به معنی حضور تکانه مکانیکی در رابطه جرم است. اکنون $m_0^2=\pi^2$ است. پس، رابطه هامیلتونی به صورت $\hat{H}=(\hat{\pi}_{\alpha}g^{\alpha\beta}\hat{\pi}_{\beta})^{\frac{1}{2}},$ است.

۱-۲ نظریه میدان

در این حالت، با پذیرش مفاهیم و اصول مکانیک کوانتومی، مسیر مطالعه را در فضای هیلبرت ادامه می‌دهیم.پس، با فرض وجود ویژه بردار و مقدار برای هامیلتونی، حالت ویژه برداری-ویژه مقداری به صورت زیر خواهد بود:

$$\hat{H}\left|\varphi\right\rangle=m_0\left|\varphi\right\rangle, \quad (۸)$$

با هامیلتونی (۸) به دو صورت می‌توان برخورد کرد. ابتدا به توان دوم آن فکر می‌کنیم. پس می توان نوشت:

$$\hat{H}^2\left|\varphi\right\rangle=m_0^2\left|\varphi\right\rangle, \quad (۹)$$

اما روابط (۸) و (۹) یکی نیستند. در واقع هرگاه عملگری وجود داشته باشد که اثرش روی ویژه بردار هامیلتونی پوچ باشد، $\hat{\Lambda}\left|\varphi\right\rangle=0$، لزومی ندارد که این عملگر هرمیتی باشد. پس می‌تواند دارای رابطه متفاوت $\hat{\Lambda}^{\dagger}\left|\varphi\right\rangle\neq0$ باشد. بنابراین رابطه $(\hat{H}^{\dagger}+\hat{\Lambda}^{\dagger})(\hat{H}+\hat{\Lambda})\left|\varphi\right\rangle=m_0^2\left|\varphi\right\rangle,$ دست‌یافتنی است. زیرا براساس بند ۴، بیان شد که آنچه به m_0 می‌انجامد فیزیک مسئله است که در هامیلتونی قرار دارد. با توجه به مطالب آخر، رابطه نهای به صورت $\hat{H}^2\left|\varphi\right\rangle+m_0\hat{\Lambda}^{\dagger}\left|\varphi\right\rangle=m_0^2\left|\varphi\right\rangle,$ خواهد بود. بدیهی است که جمله میانی نمی‌تواند شامل فیزیک مسئله باشد و تنها شامل هندسه خواهد بود. همچنین می‌دانیم که رابطه توان دوم با رابطه اولیه معادل نیست بلکه دارای جواب‌های بیشتری از آن است. پس در جواب‌ها باید گزینش انجام داد مگر این‌که جرم منفی یا انرژی منفی را معتبر بدانیم. از آن‌جاکه ساختار هامیلتونی یک ساختار جذری بود، رابطه (۸) را به رابطه (۹) تبدیل کردیم. حالا، با ضرب $\{\langle q\left|\right\}$ های فضای فاز از چپ، رابطه توان دوم با رابطه

[Downloaded from jmrph.khu.ac.ir on 2026-06-26]

$$\langle q|(\hat{\pi}^{\kappa} g_{\kappa\lambda} \hat{\pi}^{\lambda})|\varphi\rangle - m_0^2\varphi(q) + m_0\Lambda(q)\varphi(q) = 0,$$

معادل می شود. اساسا، فرض این بخش این است که عملگر $\hat{\Lambda}$ تغییری در ویژه مقادیر هاملتونی ندارد اما در توان دوم آن تاثیر دارد. در ادامه و برای سادگی کار، می‌توان تعریف بهنجار $m_0\Lambda(q) = \lambda(q)$ را انجام داد که نتیجه آن معادله حرکت نهایی زیر می شود:

$$g_{\kappa\lambda} D^{\lambda} D^{\kappa} \varphi(q) - m_0^2\varphi(q) + \lambda(q)\varphi(q) = 0, \quad (۱۰)$$

البته می‌دانیم نمایش مکانی تکانه مکانیکی برابر است با

$$\langle q|\hat{\pi}_{\kappa}|q'\rangle = \delta(q-q')(-i\partial_{q'} + \Gamma^{\lambda}_{\kappa\lambda}(q')) = (-i\partial_q + \Gamma^{\lambda}_{\kappa\lambda}(q))\delta(q-q'),$$

در آخر اینکه رابطه به دست آمده (۱۰) همان معادله کلین – گوردون است. از معادله حرکت کلین – گوردون می توان کنش اولیه را حدس زد:

$$S = \frac{1}{2}\{\langle\varphi|D_{\kappa} g^{\kappa\lambda} D_{\lambda}|\varphi\rangle + m_0^2\langle\varphi|\varphi\rangle - \lambda(q)\langle\varphi|\varphi\rangle\},$$

بنابراین کنش در واقع به صورت جمعی $S = S_{Matter} + S_{Geometry}$ به دست آمده است. در برخی مراجع [9-12] قسمت هندسی به صورت $2\lambda = \xi R,$ ارائه شده است. به هرحال کنش (لاگرانژی) مسئله کلین – گوردون دارای نمایش زیر خواهد بود

$$S = \frac{1}{2}\int d^d q\{(\bar{\varphi}(q)D_{\kappa}^{\dagger}) g^{\kappa\lambda}(D_{\lambda}\varphi(q)) + m_0^2\bar{\varphi}(q)\varphi(q) - \frac{\xi R}{2}\bar{\varphi}(q)\varphi(q)\},$$

کنشی که در بالا ارائه شده است تحتِ وردش به معادله اویلر - لاگرانژ $D_{\kappa}\frac{\partial L}{\partial\varphi_{;\kappa}} - \partial_k L = 0,$ یعنی معادله حرکت (۵) می رسد [9-12].

هرگاه با شروع از رابطه (۸) و بدون توان رساندن هامیلتونی، رابطه ویژه برداری – ویژه مقداری را ادامه دهیم لزومی به ورود عملگر پوچ $\hat{\Lambda}$ نداریم و می‌توانیم عملگر طرف چپ را با کمک Ω^{η}-ها (اکنون و بدون توجه به معادله دیراک فرض بر این است که چنین موجوداتی قابل استخراج باشند) به صورت خطی زیر بنویسیم:

$$(\hat{\pi}_{\kappa} g^{\kappa\lambda} \hat{\pi}_{\lambda})^{\frac{1}{2}} = \Omega^{\eta}\hat{\pi}_{\eta}, \quad (۱۱)$$

البته، $\hat{\Omega}^{\eta}$های رابطه (۱۱) را قبل از این می‌شناسیم: $\Omega^{\eta} = i\gamma^{\eta}$ که همان ماتریسهای دیراک هستند و در نظریه الکترودینامیک کوانتومی حضور دارند [13,14]. توان دوم $\hat{\Omega}^{\eta}$ ها واحد است. به این ترتیب و با جایگذاری رابطه جدید (۱۱) در (۸) خواهیم داشت:

$$i\gamma^{\eta}\hat{\pi}_{\eta}|\psi\rangle = m_0\Im|\psi\rangle, \quad (۱۲)$$

$\Im$ عملگر واحد است. مشخص است که رابطه (۱۲) در رابطه زیر صدق می نماید: $\langle\psi|(-i\gamma^{\eta}\hat{\pi}_{\eta}) = m_0\Im\langle\psi|,$. معادله حرکت (۱۲) و همیوغ مختلط آن در نمایش مکان - زمان شکل آشناتری دارند:

$$(i\gamma^{\eta}D_{\eta} - m_0\Im)\psi(q) = 0,$$

و همچنین رابطه دوم بصورت

$$(i\gamma^{\eta}D_{\eta} + m_0\Im)\bar{\psi}(q) = 0,$$

است. نکته اینکه، در روابط بندهای قبلی کمیت مستقل σ است که در صورت حضور یک میدان زمینه مانند میدان الکترودینامیکی خواهیم داشت:

$$L(q, q_{;\sigma}) = (q^{\alpha}_{;\sigma} g_{\alpha\beta} q^{\beta}_{;\sigma})^{\frac{1}{2}} - eA_{\beta}.q^{\beta}_{;\sigma}$$

$$\rightarrow \frac{\partial L}{\partial q^{\kappa}_{;\sigma}} = \frac{g_{\kappa\mu}q^{\mu}_{;\sigma}}{(q^{\alpha}_{;\sigma} g_{\alpha\beta} q^{\beta}_{;\sigma})^{\frac{1}{2}}} - eA_{\kappa} = g_{\kappa\mu}q^{\mu}_{;\tau} - eA_{\kappa},$$

در واقع، حضور میدان زمینه در تکانه مکانیکی تاثیر گذار خواهد بود:

$$\pi_{\kappa} = p_{\kappa} + q.\Gamma_{\kappa} - eA_{\kappa} \quad (۱۳)$$

در این رابطه $q.\Gamma_{\kappa} = q^{\alpha}\Gamma^{0}_{\alpha\kappa}$ است. رابطه (۱۳) نشان می‌دهد که تکانه مکانیکی چگونه به ساختار هندسی و میدان‌های زمینه مرتبط است.

۱-۳ گسترش براکت پوآسون

براکت پوآسون در ساختار کلاسیک، توسط $2(n-1)$

[Downloaded from jmrph.khu.ac.ir on 2026-06-26]

مختصه فضاییِ $\eta \in \{\vec{q},\vec{p}\}$، از $2n$ مختصه فضا-زمان تشکیل شده است و رابطه اصلی $\{,\}_{PB}$ تحت متریک فضای فاز بصورت زیر داده می‌شود:

$$\{A\ ,B\}_{P.B\ \text{Under Metric } w} = \sum \frac{\partial A}{\partial \eta^i} w^{ij} \frac{\partial B}{\partial \eta^j}, \quad (۱۴)$$

با تعریف نماد $\{\ ,\ \}^w \equiv \{\ ;\ \}$ می‌توانیم متریک فضای فاز را در (۱۴) پنهان کنیم $\{\ ;\ \}_{P.B} = \sum \frac{\partial}{\partial \eta^i} w^{ij} \frac{\partial}{\partial \eta^j}$. در این روابط، $w^{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \Im \\ -\Im & 0 \end{pmatrix}$ متریک فضای فاز و $\Im$ ماتریس واحد است. متریک فضای فاز بطور مستقیم از متریک فضا – زمان القاء نمی‌گردد و یک مفهوم تعریفی است. در واقع خمینه تعلق مختصات تعمیم یافته و تکانه های همیوغ یکی نیست و متریک فضای فاز یک تعریف سازگار بین آن‌هاست. براساس همین نکته، متریک فضای فاز اصولا ربطی به متریک فضا – زمان ندارد. معادلات حرکت کلاسیکی نیز بر اساس نرخ تغییر زمان مختصات فضای فاز داده شده‌اند:

$$\dot{\eta}_i = w_{ij} \frac{\partial H}{\partial \eta_j},$$

که دوباره بازتعریف خواهند شد. مشتق رابطه بالا نسبت به زمان است. مشخص است که

$$\delta\{A;B\}_{P.B} = \sum \frac{\partial \delta A}{\partial \eta^i} w^{ij} \frac{\partial B}{\partial \eta^j} + \frac{\partial A}{\partial \eta^i} w^{ij} \frac{\partial \delta B}{\partial \eta^j} + \frac{\partial A}{\partial \eta^i} \delta w^{ij} \frac{\partial B}{\partial \eta^j},$$

هرچند برای برکت پوآسون با متریک کلاسیکی بیان شده جمله آخر صفر است.

۲-۱ انگیزه

از روابط بالا مشخص می شود که تعریف جابجاگر پوآسون با تبدیلات لورنتس همخوانی ندارد و ناوردای نسبیت نیست. این مطلب مستقل از توابع موردی برای محاسبه در براکت پوآسون مانند $A(q,p)$ و $B(q,p)$ در رابطه آخر است. ناوردا نبودن براکت پوآسون به سه عامل بستگی دارد ۱- عدم ناوردایی فضای فاز تحت تبدیلات لورنتس که به معنی این است که فضای فاز کلاسیکی دارای ابعاد کمتر از ابعاد کامل فضا – زمان است و به علت درهم پیچیدن مولفه‌های فضا – زمان و متعاقب آن تکانه توسط تبدیلات لوزنتس، ناوردای لورنتسی نیست، یعنی $2n-2$ بعدی بودن فضای فازِ جهانِ $2n$ بعدی، یکی از دلایل لورنتسی نبودن ضرب پوآسون است. ۲- دلیل دوم، هموردا نبودن عمل‌های مشتق‌گیر در فضای فاز کلاسیک است. مطابق بندهای ۱ و ۲، مشتق‌های استفاده شده در روابط فضای فاز کامل نیستند. سعی خواهیم کرد که این موانع را برای رسیدن به فضای فاز با ضرب پوآسون سازگار با نسبیت مرتفع نماییم.

۲-۲ ضرب پوآسون فراگیر

در ابتدا، برای فضا زمان $2n$ بعدی F، فضای فاز $2n$ بعدی، شامل η-های بخش قبل باضافه $\eta^0 = \{q^0, p^0\}$ را در نظر می‌گیریم. براساس چارچوب نسبیت و چهاربردارها، این یک گسترشِ لازم است چراکه تغییرات نسبیتی شامل درهم پیچیدگی مولفه‌های فضا - زمان می‌شود. اما کافی نیست. هر عضو فضای فاز را می‌توانیم به صورت واحد و بر نمایش برداری، بردار $2n$ بعدی نمایش دهیم. واضح است که این گسترشِ نمایش در سادگی متن، نقش موثری دارد: $\eta = \begin{pmatrix} q_\mu \\ p_\mu \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$. فضای فاز دوگانِ F، $^*F$ را برپایه فضای دوگان فضا – زمان و فضای دوگان فضای تکانه تعریف می‌کنیم. فضای دوگان فضای فاز، فضایی است که ضرب $^*F \times F : \tilde{D}A.w.\tilde{D}B$ از چپ روی فضای فاز اصلی تعریف شده است. فضای فاز دوگان فضایی بزرگتر از فضای فاز اصلی خواهد بود. تعریف فضای دوگانِ مکان - زمان و تکانه بدون حضور متریک دارای اشکال در تعریف است. نکته آن در بخش بعد مشخص خواهد شد. متریک فضای فاز در سطر و ستون صفرم تغییر علامت نمی‌دهد و این مطلب به تعریف چهاربردار مکان – زمان، بدون وارد کردن متریک برمی‌گردد: ($x^0 = ict$). اما، با وارد کردن متریک فضای فاز، این مطلب خاتمه می‌یابد. پس تمام جایگاههای چهار بردار مکان - زمان و تکانه در η رفتار یکسانی دارند. این نکته با همین استدلال و بطور مشابه برای فضای دوگان $^*F$ نیز قابل بیان است. همچنین، از ضد هرمیتی بودن مشتق‌گیر – که در تعریف کلاسیکیِ براکت پوآسون قرار دارد - تغییر علامت در متریکِ ضرب فضای فاز نیز قابل پیگیری است. در روابط بعد از این، از نماد $\eta = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$، که اصولا در قالب گسترش فضاهای برداری دارای پایه‌هایی به صورت $|\eta\rangle = \{|q\rangle\} \otimes \{|p\rangle\}$

[Downloaded from jmrph.khu.ac.ir on 2026-06-26]

خواهد بود، به عنوان یک عضو فضای فاز گسترش یافته استفاده نموده و به تغییر سطر و ستون صفرم متریکِ فضای فاز بسنده می‌کنیم (شکل ۱):

۱- توصیف فضای فاز دوگان – آرایش فضای فاز (همینطور فضای فاز دوگان) به متریک تعریف شده روی فضای فاز برمی‌گردد.

همچنین برای هر شاخص فضای فاز مانند α، شاخص‌های مکمل در فضای فاز را به صورت $\alpha \in \{1,2,..,n\}$، و $\bar{\alpha} \in \{n+1,n+2,..,2n\}$، تعریف می‌کنیم. با این حساب $A_{,\bar{\beta}}\eta^{\beta} = \frac{\partial A}{\partial p^{\beta}} q^{\beta}$، و $A_{,\alpha}\eta^{\bar{\alpha}} = \frac{\partial A}{\partial q^{\alpha}} p^{\alpha}$، خواهد بود.

برای راحتی، تعریف $\partial_{\bar{k}} \equiv \bar{\partial}_k$ را می‌پذیریم. همچنین با توجه به گسترش واحد فضای فاز $\hat{\Im} = \hat{\Im}_q \otimes \hat{\Im}_p$، $\hat{\eta}_q = \hat{\Im}_q \otimes \hat{q}$ و $\hat{\eta}_p = \hat{p} \otimes \hat{\Im}_p$ را به عنوان کمیت‌های عمل کننده‌های روی فضای فاز تعریف کنیم. مشخص است که عمل کنندگی این عناصر برابر است با

$$\langle \eta | (\hat{\eta}_p = \hat{p} \otimes \Im) | \eta' \rangle = \langle \eta | \eta' \rangle (-i \tilde{D}_{p'} \otimes \hat{\Im}_p)$$

اکنون و با توجه به جایگاه تعریف شده در بالا، اثرِ $\hat{\eta}^2 = \hat{\eta}_{\bar{\alpha}} \otimes \hat{\eta}^{\alpha} - \hat{\eta}_{\alpha} \otimes \hat{\eta}^{\bar{\alpha}} = [\hat{\eta}_{\bar{\alpha}}, \hat{\eta}^{\alpha}] = w^{\alpha\bar{\alpha}} \hat{\eta}_{\bar{\alpha}} \otimes \hat{\eta}_{\alpha}$ روی فضای فاز را در نظر می‌گیریم[15,16]:

$$\begin{aligned} \langle A | \hat{\eta}^2 | B \rangle &= w^{\alpha\beta} \int d^{2n}\eta' \langle A | \hat{\eta}_{\alpha} | \eta' \rangle \langle \eta' | \hat{\eta}_{\beta} | B \rangle \\ &= w^{\alpha\beta} \int d^{2n}\eta' (-i\tilde{D}'_{\alpha} A)^{\dagger} (-i\tilde{D}'_{\beta} B) \\ &= w^{\alpha\beta} tr(| \hat{\eta}_{\beta} B \rangle \langle \hat{\eta}_{\alpha} A |), \end{aligned} \quad (۱۵)$$

با این توضیح که شاخص‌های α و β شاخص‌های مکمل هستند. حالا اگر خواسته باشیم طرف چپ ناوردای لورنتسی باشد، لاجرم باید قوانین مربوط به ناوردایی ردِ (Trace) طرف راست را استخراج کنیم. یکی از این قوانین مربوط به مشتق توابع است. مشتق تعریف شده روی توابع متعلق به فضای فاز نیست بلکه از فضا – زمان وارد شده است. بنابراین برای تعمیم آن به یک فضا – زمان عمومی‌تر، تعلق یکی از توابع به فضای دوگان فضای فاز و ملاحظه سهم تاثیر انتقال موازی در مشتق‌گیری لازم است:

$$\langle A | \hat{\eta}.w.\hat{\eta} | B \rangle = w^{\alpha\beta} \int d^{2n}\eta' \{(A_{,\alpha})^{\dagger}, B_{,\beta}\}_{P.B}, \quad (۱۶)$$

این یادآوری لازم است که بدانیم مشتق نسبت به تکانه یک مشتق معمولی است و این مطلب را با معرفی مشتق کواریانت جدید $\tilde{D}_{\kappa}$ سازگار خواهیم کرد. $\tilde{D}_{\kappa}$ نسبت به بخش فضا – زمانی فضای فاز مشتق کواریانت و بازاء تکانه مشتق معمولی است. براساس رابطه (۱۶) و همچنین سازگاری ضرب پوآسونی تعمیم یافته، لازم است که تعریف زیر را به عنوان براکت پوآسونی تعمیم یافته در نظر بگیریم:

$$\begin{aligned} \{B;C\} &= (-i\tilde{D}B \,|\, w \,|\, -i\tilde{D}C) \\ &= \tilde{D}_{\kappa} B^{\dagger}.w^{\kappa\lambda}.\tilde{D}_{\lambda} C, \end{aligned} \quad (۱۷)$$

اکنون و با فرض شاخص‌های مکمل و بازاء تابع دلخواه $B(\eta)$ و هامیلتونی، بعنوان تابعی در فضای فاز، رابطه براکت پوآسون (۱۴) برابر است با

(۱۸)

$$\begin{aligned} \{B;H\} &= D_{\alpha}B^{\dagger} \frac{\partial H}{\partial p_{\alpha}} - \frac{\partial B^{\dagger}}{\partial p_{\alpha}} D_{\alpha} H \\ &= D_q B^{\dagger}.q_{,\tau} + \tilde{D}_p B^{\dagger}.p_{,\tau} = \frac{\partial B^{\dagger}}{\partial \tau}, \end{aligned}$$

اشاره می‌کنیم که روابط (۱۶)، (۱۷) و (۱۸) بازاء متریک مینکوفسکی شامل مشتق معمولی هستند.

به جهت مقایسه نتیجه رابطه (۱۵) با مرجع [۱]، مراحل تحقق رابطه (۱۵) را در فضا - زمان مینکوفسکی مطالعه می‌نماییم. بدیهی است که هرگاه $A(\eta)$ و $B(\eta)$ توابعی در فضای فاز و فضای فاز دوگان باشند، رابطه (۱۵) با وجود حضور متریک فضای فاز تحت تبدیل لورنتس تحت تبدیلات لورنتس به صورت زیر تغییر نمی‌نماید:

$$\begin{aligned} &\langle A | \Lambda^{-1}\Lambda \hat{\eta}_{\alpha}^{\dagger} w^{\alpha\beta} \hat{\eta}_{\beta} \Lambda^{-1}\Lambda | B \rangle \\ &= \langle A | \hat{\eta}_{\alpha} w^{\alpha\beta} \hat{\eta}_{\beta} | B \rangle, \end{aligned}$$

بنابراین، هرگاه یکی از توابع مانند $A(\eta)$ را متعلق به فضای فاز بگیریم باید عملگر مربوط به آنرا متعلق به فضای فاز دوگان برداریم. و برای تابع بعدی، $B(\eta)$ به صورت برعکس‌عمل می‌کنیم.

بررسی موردی: برای حالت فضا – زمان $(1+1)$ بعدی، ماتریس لورنتس با ثابت خیز ε به صورت زیر خواهد بود:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cosh\varepsilon & \sinh\varepsilon \\ \sinh\varepsilon & \cosh\varepsilon \end{pmatrix}$$ همچنین وارون آن نیز برابر

[Downloaded from jmrph.khu.ac.ir on 2026-06-26]

است با $\Lambda^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}\cosh\varepsilon & -\sinh\varepsilon\\ -\sinh\varepsilon & \cosh\varepsilon\end{pmatrix}$، که در آن Δ دترمینان ماتریس لورنتس می‌باشد. واضح است که دترمینان Δ برابر یک است. به این ترتیب تبدیل توابعِ در فضای فاز به شکل زیر داده می‌شود: $\begin{pmatrix}x_1'\\ x_0'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cosh\varepsilon & \sinh\varepsilon\\ \sinh\varepsilon & \cosh\varepsilon\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_0\end{pmatrix}$ در حالیکه این تبدیل در فضای دوگان به صورت $(x_1'\ ,\ x_0')=\begin{pmatrix}\cosh\varepsilon & -\sinh\varepsilon\\ -\sinh\varepsilon & \cosh\varepsilon\end{pmatrix}(x_1\ ,\ x_0)$ است.

مطلبی که لازم است در مورد عملگر مشتق بیان شود این است که مشتق در زیر فضاهای فضای فاز شامل مشتق نسبت به فضا - زمان و مشتق مربوط به زیر فضای تکانه – انرژی، دارای نمایش‌های (علامت) متفاوت است. این تفاوت بین فضای فاز اصلی و فضای فاز دوگان رخ می‌دهد. اگر $\cosh\varepsilon=c$ و $\sinh\varepsilon=s$ بگیریم، شکل ساده شده تبدیل لورنتس برابر $\Lambda=\begin{pmatrix}\mathrm{c} & \mathrm{s}\\ \mathrm{s} & \mathrm{c}\end{pmatrix}$, خواهد بود. اکنون بازاء $c^2-s^2=1,$ وارون این تبدیل نیز به صورت $\Lambda^{-1}=\begin{pmatrix}\mathrm{c} & -\mathrm{s}\\ -\mathrm{s} & \mathrm{c}\end{pmatrix},$ به دست می‌آید. در این حالت داریم

$$\begin{pmatrix}x_1'\\ x_0'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathrm{c} & \mathrm{s}\\ \mathrm{s} & \mathrm{c}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_0\end{pmatrix},$$

$$(x_1'\ ,\ x_0')=(x_1\ ,\ x_0)\begin{pmatrix}\mathrm{c} & -\mathrm{s}\\ -\mathrm{s} & \mathrm{c}\end{pmatrix},$$

با همین روش، عملگرهای مشتق فضای فاز و دوگانِ آن به صورت

$$\begin{pmatrix}\partial_1'\\ \partial_0'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathrm{c} & \mathrm{s}\\ \mathrm{s} & \mathrm{c}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\partial_1\\ \partial_0\end{pmatrix},$$

$$(\partial_1'\ ,\ \partial_0')=(-\partial_1\ ,\ -\partial_0)\begin{pmatrix}\mathrm{c} & -\mathrm{s}\\ -\mathrm{s} & \mathrm{c}\end{pmatrix},$$

خواهند بود. در ادامه، دوتابع ساده x^1 و p^1 را در نظر می‌گیریم. x^1 تابعی از فضای فاز دوگان و p^1 تابعی در فضای فاز اصلی می‌باشند. بنابراین رابطه (۱۵) به صورت زیر داده خواهد شد:

$$w^{\alpha\beta}tr\{\begin{pmatrix}\mathrm{c}\,\partial_1+s\partial_0\\ s\partial_1+c\partial_0\end{pmatrix}_\beta(cx^1-sx^0)$$
$$*(-\mathrm{c}\,\partial_1+s\partial_0\,,\ s\partial_1-c\partial_0)(\mathrm{c}\,p^1+sp^0)_\alpha\}$$
$$=tr\{\begin{pmatrix}c^2-s^2\\ sc-cs\end{pmatrix}*(-c^2+s^2,cs-sc)(-1)\}$$
$$=(-1)tr\{\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\}=1,$$

فاکتور (-1) در خط سوم بواسطه متریک فضای فاز ایجاد شده است. این نتیجه قابل مقایسه با نتیجه مرجع [۱] است که ناوردا بودن را به صورت دستی حفظ نموده است در حالیکه رابطه (۱۵) ناوردایی لورنتسی را در فضای فاز منتسب به فضا – زمان مینکوفسکی دو بعدی داده شده به صورت رسمی نوید می‌دهد.

۳-۱ رهیافتی برای DSR

انحراف از اصول نسبیت، پیشنهادی برای توجیه و توصیف پرتوهای کیهانی (پروتونها) است که زمان آشکارسازی، طیف انرژی آن‌ها خارج از کرانه بالای انرژی‌های پیش بینی شده از نظریه نسبیت است. فیزیکدانان ناوردای لورنتسی جدیدی بنام طول پلانک به اصول نسبیت خاص اضافه نموده و با تغییر در جبر $\kappa-Poincare$ نظریه جدید را نسبیت خاص دوگانه می‌نامند. یکی از دست‌آوردهای آن تغییر در رابطه تکانه هاست و یکی از مشهورترین آن‌ها رابطه $Magueijo-Smolin$ است:

$$p_0^2-\vec{p}.\vec{p}-m_0^2(1-\frac{p_0}{\kappa})^2=0,\quad (۱۹)$$

در (۱۹)، κ کمیت اسکالر لورنتسی جدید است. با استناد به دست‌آورد این مقاله، ابتدا رابطه ۱۷ را برای m_0^2 حل می‌نماییم:

$$m_0^2=p_0^2-\vec{p}.\vec{p}+m_0^2(\frac{p_0^2}{\kappa^2}-2\frac{p_0}{\kappa}),$$

بنابراین (توان دوم) هامیلتونی نسبیتی برابر است با

$$H^2=p_0^2-\vec{p}.\vec{p}+m_0^2(\frac{p_0^2}{\kappa^2}-2\frac{p_0}{\kappa}),\quad (۲۰)$$

اکنون، از آن‌جا که لاگرانژی، تبدیل لژاندر هامیلتونی است و

[Downloaded from jmrph.khu.ac.ir on 2026-06-26]

لاگرانژی مستقل از تکانه و هامیلتونی مستقل از سرعت است: $\frac{\partial L}{\partial p}=0\rightarrow \overset{\circ}{q}=\frac{\partial H}{\partial p}$، از (۲۰) می‌توان دریافت که

$$\overset{\circ}{q}_k=-2p_k,$$
$$p_0=\frac{\overset{\circ}{q}_0-2\frac{m_0^2}{\kappa}}{2-2\frac{m_0^2}{\kappa^2}} \quad (۲۱)$$

با جایگذاری موارد به دست آمده از (۲۱) در تبدیل لژاندر هامیلتونی به لاگرانژیِ سیستم خواهد رسید:

(۲۲)

$$L=-\frac{1}{2}\overset{\circ}{q}_i\,\overset{\circ}{q}^i+\frac{\overset{\circ}{q}^0(\overset{\circ}{q}_0-2\frac{m_0^2}{\kappa})}{2(1-\frac{m_0^2}{\kappa^2})}$$
$$-2\frac{m_0^2}{\kappa}\frac{\overset{\circ}{q}^0(\overset{\circ}{q}_0-2\frac{m_0^2}{\kappa})}{2(1-\frac{m_0^2}{\kappa^2})}+\frac{m_0^2}{\kappa^2}(\frac{(\overset{\circ}{q}_0-2\frac{m_0^2}{\kappa})}{2(1-\frac{m_0^2}{\kappa^2})})^2,$$

رابطه (۲۲) قابل مقایسه با جواب به دست آمده از روش براکت دیراک روی سیستمهای مقید است [۲۲-۱۷]. از نظر این مقاله، در زمینه DSR، آن رابطه تصحیح جرم و تکانه‌ای دقیق است که رابطه معکوس سرعت و تکانه قابل دست‌یابی باشد. به این معنی که از شرط استقلال هامیلتونی از سرعت، رابطه $\overset{\circ}{q}^\lambda=\frac{\partial H}{\partial p_\lambda}$ وارون پذیر باشد. در غیر اینصورت، نتیجه لاگرانژی برای DSR-ها غیر دقیق و اختلالی خواهد بود.

۱-۴ نتیجه‌گیری

لاگرانژی ذره نسبیتی را در فضا – زمان عمومی مد نظر قرار داده و نشان دادیم که معادلات حرکت به دست آمده از لاگرانژی نسبیتی چگونه تحت تاثیر مشخصات هندسی فضا – زمان قرار می‌گیرند. با تغییر در لاگرانژی‌های نسبیتی - با محاسبه انرژی جنبشی ذره نسبیتی به جای انرژی آن - و با اعمال تبدیل لژاندرِ لاگرانژی تغییریافته توانستیم تابع هامیلتونی نسبیتی را استخراج کنیم. کارایی هامیلتونی نسبیتی یکی از موارد مورد مطالعه بود. در حقیقت از معادلات حرکتِ هامیلتونیِ نسبیتی استفاده کرده و فضای فاز را گسترش دادیم بطوریکه ابعاد زیر فضای مکانی و تکانه‌ی فضای فاز و ابعاد فضا – زمان برابر شدند. همچنین با گسترش فضای فاز و تعریف فضای فاز دوگان، براکت پوآسون را تعمیم داده و نشان دادیم نتیجه با هامیلتونی نسبیتی و معادلات حرکت سازگار است. توانستیم با مکانیزم فضای دوگان، براکت پوآسون را بعنوان ضربِ فضای فاز تفسیر کنیم و به صورت مستقیم چگونگی ناوردایی براکت پوآسون، زمانی‌که فضا – زمان مینکوفسکی باشد را تحقیق کرده و توانایی نتایج را نشان دادیم. همچنین مشخص شد که برای تحقق ناوردایی لورنتسی براکت پوآسون، شروطی لازم است که علاوه بر وجود فضای فاز دوگان، می‌بایست یکی از توابع متعلق به فضای فاز دوگان و عملگر مربوطه‌اش در نمایش فضای اصلی باشد و همین شرط به صورت بالعکس برای تابع دوم برقرار است. این استنتاج از نگرش ضربی براکت پوآسون روی فضای فاز بوده است. با نگرش کوانتومی به هامیلتونی نسبیتی و در رهیافت کوانتومی موفق شدیم نظریه میدان‌های اسکالر و اسپینوری را تولید نماییم و هم‌ریشه بودن این نظریه‌ها را اثبات کنیم. یکی دیگر از توانایی‌های هامیلتونی نسبیتی را برای حل وارون نظریه DSR بکار بردیم و توانستیم لاگرانژی مربوطه را که قابل مقایسه با روش براکت دیراک روی سیستمهای مقید بود به دست آوریم. به صورت مطالعه موردی و اعمال نتایج این بخش روی رابطه پاشندگی $Magueijo-Smolin$، لاگرانژی را بنا نموده و شرط اساسی برای ساختن لاگرانژی از رابطه پاشندگی به دست آوردیم. در انتها لازم است تاکید کنیم که نتایج این تحقیق تاثیری در رهیافت مکانیک کوانتومی غیر نسبیتی ندارد.

۱-۵ تشکر و قدردانی

شایسته است مراتب قدردانی خود را از دانشگاه شهرکرد برای پشتیبانی از این تحقیق اعلام دارم.

منابع

[1] Yoel Tikochinsky, *International Journal of Theoretical Physics, VoL **33**, No. **8**, 1994*

[2] Paul Bracken, *International Journal of Theoretical Physics, Vol. **37**, No. **5**, 1998*

[3] H. Goldstein, Charles P. Poole and John L. Safko "Classical Mechanics", *published by Pearson Education, Inc., publishing as Addison-Wesley, Copyright, 2002*

[Downloaded from jmrph.khu.ac.ir on 2026-06-26]

[4] V. I. Arnol'd, K. Vogtmann, A. Weinstein, "Mathematical Methods of Classical Mechanics", *Springer-Verlag New York Inc. 1989*

[5] William L. Bruke, "Applied Differential Geometry", *Cambridge University Press, Cambridge, New York 1985*

[6] A. Stern and I. Yakushin, "Deformed Wong particles", *Phys. Rev.* ***D****, Vol* ***48****, N.* ***10*** *1993*

[7] Freeman J. Dyson, "Feynman's Proof of the Maxwell's Equations", *Am. J. Phys.* ***58 3*** *209 1990*

[8] J. J. Sakurai, "Advanced Quantum Mechanics", *Addison-Wesley Publishing Company, Inc. 1994*

[9] L. E. Parker and David J. Toms, "Quantum Field Theory in Curved Spacetime", *United States of America by Camberidge University Press, New York, 2009*

[10] N. D. Birrell and P. C. W. Davies, "Quantum Fields On Curved Space", *Cambridge University Press 1982*

[11] Stephen A. Fulling, "Aspects of Quantum Field Theory in Curved Space-Time", *Cambridge University Press 1989*

[12] Bryce S. DeWitt, "Quantum Field Theory in Curved Spacetime", *North Holland Publishing Company, Amesterdam 1975*

[13] Claude Itzykson and Jean Bernard Zuber, "Quantum Field Theory", *Dover Publications, INC. Mineola, New York, 1980*

[14] N. N. Bogoliubov and D. V. Shirkov, "Quantum Fields", *Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc. 1983.*

[15] Jean-Paul Dufour, Nguyen Tien Zung, "Poisson Structures and Their Normal Forms", *Birkhäuser Verlag, P.O. Box 133, CH-4010 Basel, Switzerland 2005*

[16] J. E. Marsden, R. Montgomery, P. J. Morrison and and W. B. Thompson, "Covariant Poisson Brackets for Classical Fields", *Annals of Physics* ***169****, 2947 1986*

[17] J. Kowalski Glikman, "Approaches to Quantum Gravit: Toward a New Understanding of Space, Time and Matter", *ed. Daniele Oriti. Cambridge University Press 2009*

[18] . Bird, D. J. et al., "Detection of a Cosmic Ray with Measured Energy Well beyond the Expected Spectral Cutoff due to Cosmic Microwave Radiation", *Astrophys. J.* ***441****, 144–150 1995*

[19] Magueijo, J. & Smolin, L. "Lorentz Invariance with an Invariant Energy Scale", *Phys. Rev. Lett.* ***88****, 190403 2002*

[20] Kowalski-Glikman, J. & Nowak, S. "Doubly Special Relativity theories as different bases of κ–Poincar´e algebra", *Phys.Lett.* ***B*** *539 126-132 2002*

[21] Nejad, S.A., Dehghani, M. & Monemzadeh, M. "Lagrange multiplier and Wess-Zumino variable as extra dimensions in the torus universe", *J. High Energ. Phys* ***17*** *2018*

[22] M. Dehghani, S. Abarghouei Nejad and M. Monemzadeh, "Modified Anyonic Particle and Its Fundamental Gauge Symmetries", *Hindawi Advances in High Energy Physics Vol.* ***2020****, 2020*

[Downloaded from jmrph.khu.ac.ir on 2026-06-26]

JMRPh. (10)(1): 51-62, Spring & Summer 2025

Relativistic Hamiltonian and Relevant Theories

[1] Abolfazl Jafari

[1*] Shahrekord University, Shahrekord, Iran

Article details

Received: 2025/09/14
Accepted: 2025/10/19
Published: 2025/10/25

ISSN: 2588-493x
eSSN: 2588-4821

Correspondence email:

jafari-ab@sku.ac.ir

Abstract

Our proposed method allows us to derive the relativistic Hamiltonian from a given Lagrangian within a relativistic framework. We demonstrate that a simple modification of the Lagrangian, which incorporates relativistic effects, enables us to achieve this goal. By utilizing the capabilities of the relativistic Hamiltonian to describe field theory, we can formally derive the theories of scalar and spinor fields by considering canonical and mechanical momenta. Thus, the co-rootedness of these theories becomes clear. After finding the relativistic Hamiltonian, we obtain Hamiltonian equations of motion and generalize Poisson's bracket based on them. Once we obtain the relativistic Hamiltonian, we can derive the Hamiltonian equations of motion and use them to generalize the Poisson product. We expand the phase space to accurately define the dual phase space for the relativistic Poisson bracket. This process requires redefining the derivatives on both the original and dual phase spaces. The requirement for a complete phase space to be Lorentzian invariant necessitates a modification of classic mechanics. This research effectively arrives at the relativistic Hamiltonian and also extracts and presents the Lagrangian based on the dispersion relation specified in the DSR theory.

Keywords: Relativistic Systems, Relativistic Lagrangian and Hamiltonian, Bosonic and Fermionic Field Theory, Legendre Transform, Phase Dual Space, Relativistic Poisson Bracket

[Downloaded from jmrph.khu.ac.ir on 2026-06-26]