نشریه پژوهش های نوین فیزیک: جلد ۹، شماره ۲، پاییز و زمستان ۱۴۰۳

# بررسی شرایط آدیاباتیک کوانتومی برای یک الگوریتم تعمیم یافته کوانتومی

آرش کریم‌خانی[1]، امیر قلعه[2]

[1*]استادیار، گروه الکترونیک، دانشکده مهندسی برق، دانشگاه تفرش، تفرش، ایران

[2] دانشیار، گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه تفرش، تفرش، ایران

اطلاعات مقاله

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۱۲/۲۶
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۴/۹
تاریخ چاپ: ۱۴۰۴/۴/۱۶

**شاپای چاپی:** 2588-493x
**شاپای الکترونیکی:** 2588-4921

* نویسنده مسئول
karimkhani@tafreshu.ac.ir

## چکیده

رایانش آدیاباتیک کوانتومی راهی برای شبیه‌سازی یک الگوریتم کوانتمی بوسیله قضیه‌های شناخته شده در مکانیک کوانتوم است. در قضیه آدیاباتیک کوانتومی، شرایط تحول آدیاباتیک یک سامانه تعریف می‌شود و سامانه‌های کوانتومی بررسی می‌شوند. برآورده شدن شرایط آدیاباتیک کوانتومی برای سامانه ها بدیهی نیستند و باید بررسی شوند. در این مقاله الگوریتم تعمیم یافته دویچ در چارچوب رایانش آدیاباتیک کوانتومی مطالعه شده است. هامیلتونی وابسته به زمان به وسیله توابع حالت ورودی و خروجی بررسی شده است. حالت ورودی سامانه یک حالت درهم تنیده کوانتومی دو ذره‌ای در نظر گرفته شده است. چهار حالت خروجی به دست آمده معرف خروجی محاسباتی خواهند بود. ترازهای انرژی مجاز سامانه محاسباتی به عنوان ویژه حالت‌های هامیلتونی به دست آمده است. توابع زمان اجرای استاندارد برای بررسی سامانه محاسباتی استفاده شده است. با انتخاب توابع زمان اجرای متفاوت، درستی فرض قضیه آدیاباتیک کوانتومی برای الگوریتم تعمیم یافته دویچ مطالعه شده است. با رسم ترازهای انرژی مجاز سامانه، اختلاف انرژی میان ترازهای انرژی به دست آمده است. با بررسی اختلاف انرژی حالت‌های برانگیخته با حالت پایه، نشان داده شده که هامیلتونی پیشنهادی در تمام طول اجرای الگورینم، شرایط آدیاباتیک را فراهم می‌کند.

***واژگان کلیدی:*** الگوریتم تعمیم یافته دویچ، تراز انرژی، رایانش کوانتومی، رایانش کوانتومی آدیاباتیک.

## مقدمه

رایانش کوانتومی از روش‌های متفاوتی برای پردازش داده‌ها استفاده می‌کند. یک روش به نام رایانش کوانتومی دیجیتال شناخته می شود که بر اساس دروازه‌های کوانتومی و عملگرهای منطقی بر اساس مفهوم اندازه‌گیری در مکانیک کوانتوم است [2-1] . روش دیگر به نام رایانش کوانتومی آنالوگ شناخته می‌شود که بر اساس تحول پیوسته متغییرها و بر مبنای معادله شرودینگر است[3].

روش های ترکیبی دیجیتال-آنالوگ، مانند تبرید کوانتومی، نیز مورد توجه قرار گرفته‌اند[4]. هر کدام از روش های پردازش کوانتومی دارای مزایای خود هستند. رایانش کوانتومی دیجیتال از نظر پیاده‌سازی منطقی برای افرادی که آشنایی کمی نسبت به مبانی مکانیک کوانتوم دارند، مانند بیشتر مهندسان، دسترس پذیر است. اما معمولا برای حل یک مساله خاص لازم است تعداد زیادی دروازه کوانتومی استفاده شود. روش رایانش کوانتومی آنالوگ برای محققین



[ Downloaded from jmrph.khu.ac.ir on 2026-05-22 ]

[ DOI: 10.61882/jmrph.9.2.15 ]

آشنا بـه مبـانی مکانیـک کوانتـوم جـذاب اسـت، ولـی پیچیـدگی حـل معادلـه شـرودینگر بـرای یـک سـامانه، باعـث مـی شـود محققـین ناآشـنا بـه مبـانی مکانیـک کوانتـوم از آن اجتنـاب کنند.

در رایانش کوانتومی دیجیتال، کیوبیت‌ها به صورت پایه‌های فضای هیلبرت معرفی شده و به عنوان حامل‌های اطلاعات استفاده می‌شوند. هر چند می‌توان از هر سامانه دو حالته برای ساختن کیوبیت‌ها استفاده کرد، در محاسبات نظری برای کیوبیت‌ها معمولا از حالات اسپین استفاده می‌شود که دو حالت ۰ و ۱ منطق دیجیتال را به وجود می‌آورند. در رایانش کوانتومی آنالوگ هم از کیوبیت‌ها استفاده می شود؛ ولی تحول آنها با استفاده از هامیلتونی و مطابق معادله شرودینگر انجام می‌شود[3-1].

تفاوت اساسی پردازش کوانتومی نسبت به پردازش کلاسیک در مفهوم در همتنیدگی در مکانیک کوانتومی است که باعث می شود در رایانش کوانتومی لازم نباشد سامانه در یکی از حالات ۰ یا ۱ باشد. پدیده در همتنیدگی کوانتومی باعث می شود که حالت رایانش کوانتومی به صورت یک ترکیب خطی از کیوبیت‌ها شود. وجود در همتنیدگی کوانتومی باعث می شود که سرعت پردازش الگوریتم‌های کوانتومی بسیار بیشتر از الگوریتم‌های کلاسیک متناظر باشد. در واقع سامانه با $n$ کیوبیت می تواند دارای $2^n$ حالات متعامد باشد. در عمل این مطلب به این معنی است که یک رایانه کوانتومی با $n$ کیوبیت می تواند تعداد $2^n$ پردازش موازی را در مقایسه با یک رایانه کلاسیک انجام دهد[2-1].

می توان مسایلی را برای حل در پردازش کوانتومی مطرح کرد و برای حل آنها الگوریتم‌هایی را پیشنهاد کرد. در ۱۹۸۵ پیتر دویچ با معرفی اولین الگوریتم کوانتومی برای حل یک مساله خاص، گام بلندی جهت معرفی ایده رایانش کوانتومی برداشت[5]. در ۱۹۹۳ برنشتاین و وزیرانی نشان دادند که به صورت اصولی یک رایانه کوانتومی بسیار قدرتمندتر از یک رایانه کلاسیک است[6]. برنشتاین و وزیرانی از الگوریتم خاصی استفاده نکردند؛ بلکه برای اثبات از مفهوم ماشین تورینگ بر مبنای مکانیک کوانتوم استفاده کردند[6]. احتمالا آغاز توجه جامعه علمی به الگوریتم‌های کوانتومی به وسیله کار درخشان کوپر اسمیت در ارائه یک الگوریتم کوانتومی برای تبدیل فوریه انجام گرفت[7].

پیشرفت در زمینه ارایه الگوریتم‌ها بسیار چشم‌گیر بوده است. برای مثال در مقاله [8] الگوریتم کوانتومی برای پیدا کردن فاکتورهای اعداد اول یک عدد دلخواه پیشنهاد شده که سرعت انجام آن چندین برابر الگوریتم کلاسیک است. الگوریتم جستجوی گرور در مرجع [9] از ورودی‌های یک تابع به دنبال ورودی خاصی می‌گردد و سرعت انجام این فرایند با الگوریتم کوانتومی، بسیار بیشتر از الگوریتم کلاسیک است [9] . از الگوریتم گرور می‌توان استفاده کرد تا کمینه یک تابع را به دست آورد که این الگوریتم کوانتومی در مرجع [10] بررسی شده است. نمونه جالب دیگر از استفاده از الگوریتم کوانتومی در مرجع [11] برای به توان رساندن یک ماتریس پیشنهاد شده است. هر کدام از الگوریتم‌های معرفی شده، متناسب با مسائل تعریف شده توسط پیشنهادکنندگان الگوریتم‌ها، معرفی شده‌اند که در مرجع [2] برخی از الگوریتم‌های کوانتومی بررسی شده‌اند و نشان داده شده که چگونه از کیوبیت‌ها در الگوریتم‌های کوانتومی استفاده می‌شود. از نظر عملی نیز در سال ۲۰۱۹ شرکت گوگل با همکاری سازمان ناسا ادعا کردند که قادر به تهیه کیوبیت‌هایی جهت رایانش کوانتومی شدند. پیشرفت‌ها در حوزه رایانش کوانتومی و الگوریتم‌های کوانتومی به قدری مهم بوده که جایزه نوبل فیزیک در سال ۲۰۲۲ به این حوزه تحقیقاتی اختصاص پیدا کرد.

رایانش کوانتومی آدیاباتیک [15-12]، یک روش بر مبنای رایانش کوانتومی آنالوگ است که برای بررسی الگوریتم‌های کوانتومی از تحول آدیاباتیک هامیلتونی استفاده می‌کند. در رهیافت رایانش کوانتومی آدیاباتیک می توان زمان اجرا الگوریتمهای کوانتومی را بررسی کرد.



[ Downloaded from jmrph.khu.ac.ir on 2026-05-22 ]

[ DOI: 10.61882/jmrph.9.2.15 ]

به تازگی الگوریتم تعمیم‌یافته دویچ در [16,17] پیشنهاد گردیده است که اساس این الگوریتم تعمیم‌یافته بر مبنای یک فضای هیلبرت چهاربعدی است که درهم‌تنیدگی یک سامانه کوانتومی را توصیف می‌کند.

در مقاله [18]، نویسندگان این مقاله تلاش کردند که الگوریتم تعمیم یافته دویچ را در چارچوب رایانش کوانتومی آدیاباتیک بررسی کنند و هامیلتونی مربوطه را به دست آورند. اما در چارچوب رایانش کوانتومی آدیاباتیک، انتخاب تابع تحول زمانی مهم است. در این مقاله تلاش گردیده که در چارچوب رایانش کوانتومی آدیاباتیک مراجع [12,13]، یک هامیلتونی به سامانه متناظر آدیاباتیک [16,17] نسبت داده شود و توابع تحول زمانی استاندارد بررسی شود. در این مقاله، منظور از الگوریتم تعمیم‌یافته دویچ، الگوریتمی است که در مراجع [16,17] معرفی شده است.

## ۲- معرفی مدل

در چارچوب رایانش کوانتومی آدیاباتیک، یک هامیلتونی به سامانه نسبت داده می‌شود و با استفاده از معادله شرودینگر و قضیه آدیاباتیک کوانتومی، سامانه مطالعه می‌شود.

اگر $|\psi_i>$ ویژه حالت هامیلتونی $H$ در زمان $t=s$ باشد، مطابق معادله مستقل از زمان شرودینگر خواهیم داشت:

$$H(s)|\psi_i>=E_i(s)|\psi_i> \qquad (1)$$

فرض کنید که هامیلتونی دارای ویژه انرژی‌های $E_0(s)<E_1(s)<E_2(s)<....$ در بازه زمانی $s\in[0,1]$ باشد و $g(s)$ اختلاف انرژی بین دو حالت پایه باشد، یعنی $g(s)=E_1-E_0$ باشد. سوال این است که اگر سامانه ابتدا در حالت $|\psi(0)>$ مربوط مربوط به $H(0)$ باشد و هامیلتونی به آرامی تغییر کند، آیا تابع حالت سامانه فیزیکی نزدیک حالت پایه هامیلتونی باقی می‌ماند؟ قضیه آدیاباتیک در مکانیک کوانتوم ضمن تعریف مفاهیم ‘‘تحول آرام’’ و ‘‘نزدیک بودن به حالت پایه ’’ شرایط پاسخ به پرسش مطرح شده را بررسی می‌کند. مطابق قضیه آدیاباتیک، اگردر بازه زمانی $t\in[0,T]$ زمان بی‌بعد $\tau=\frac{t}{T}$ را تعریف نماییم و قرار دهیم $0<\varepsilon<1$ ، به شرط زیر، شرط آدیاباتیک می‌گوییم:

$$\frac{2}{T}\frac{|<\psi(\tau)|H'|\psi(0)>|}{g^2(\tau)}<\varepsilon \qquad (2)$$

که در آن $H'$ مشتق هامیلتونی نسبت به $\tau$ است. اگر شرط آدیاباتیک برقرار باشد و سامانه در حالت $|\varphi>$ باشد، آنگاه:

$$|<\psi(0)|\varphi>|^2><1-\varepsilon^2 \qquad (3)$$

البته لازم به ذکر است سنجش شرط قضیه آدیاباتیک آسان نیست و سامانه‌ها در این باره باید مورد بررسی قرار گیرند.

در این مقاله به بررسی ساختن هامیلتونی و مطالعه ویژه مقادیر الگوریتم تعمیم یافته دویچ پرداختیم. در الگوریتم تعمیم یافته دویچ از دو حالت با اسپین $\frac{1}{2}$ درهمتنیده کوانتومی به صورت کلی $\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$ استفاده می‌شود و بنابراین کیوبیت‌های حامل اطلاعات به صورت زیر هستند:

$$|\alpha\rangle|\beta\rangle=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1b_1\\a_1b_2\\a_2b_1\\a_2b_2\end{pmatrix} \qquad (4)$$

هدف الگوریتم تعمیم یافته دویچ مشخص کردن ماهیت نگاشت $f:\{0,1\}\to\{1,0\}$ در یک گام محاسباتی است. لازم به ذکر است که در الگوریتم اولیه دویچ فقط مشخص می‌شد که آیا تابع $f$ ثابت است یا خیر. منظور از ثابت بودن تابع این است که خروجی تابع با هر وضعیت ثابت باشد. یعنی فقط $0$ یا فقط $1$ باشد. به صورت کلاسیک، دو بار عملکرد تابع باید بررسی شود تا ثابت بودن تابع مشخص شود. دویچ نشان داد که با انتخاب مناسب یک عملگر کوانتومی برای تابع، می‌توان فقط با یک بار اندازه‌گیری ثابت بودن تابع را تحقیق کرد.



[ Downloaded from jmrph.khu.ac.ir on 2026-05-22 ]

[ DOI: 10.61882/jmrph.9.2.15 ]

در الگوریتم تعمیم‌یافته دویچ ماهیت $f$ به صورت کامل مشخص می‌شود. به عبارت دیگر فقط ثابت بودن یا نبودن تابع مورد تحقیق نیست و عملکرد کل آن مورد بررسی قرار می‌گیرد. برای این منظور در مراجع الگوریتم زیر پیشنهاد شده است:

۱- اگر $|0\rangle=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ و $|1\rangle=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$باشد، حالت اولیه در هم تنیده زیر را در نظر بگیرید:

$$|\psi_I\rangle=\alpha|0\rangle_A\otimes[\frac{|0\rangle_B-i|1\rangle_B}{\sqrt{2}}]+\beta|1\rangle_A\otimes[\frac{|0\rangle_B-|1\rangle_B}{\sqrt{2}}] \qquad (5)$$

که تابع حالت اولیه به صورت بهنجار است، یعنی:

$$\langle\psi_I|\psi_I\rangle=1\ ,\ |\alpha|^2+|\beta|^2=1 \qquad (6)$$
$$\alpha\neq 0,\ \beta\neq 0$$

و منظور از اندیس های A و B حالت های دو ذره A و B است. واضح است که حالت ورودی پیشنهادی، یک حالت درهم‌تنیده کوانتومی است و فضای هیلبرت توصیف‌کننده سامانه مورد نظر به صورت یک فضای چهاربعدی است. برای بررسی بهتر حالت اولیه توصیف شده با رابطه های (۵) و (۶)، مقدار درهمتنیدگی حالت اولیه را حساب می‌کنیم. با برای این کار، با توجه به مرجع [2]، ابتدا تابع چگالی کاهش یافته حالت اولیه را محاسبه می‌کنیم که به صورت زیر می‌شود:

$$\hat{\rho}_A=Tr_B(|\psi_i><\psi_i|)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & i-1\\ -i-1 & 1\end{pmatrix} \qquad (7)$$

که دارای دو ویژه مقدار $\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}$ و $\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}$ است و بنابراین مشخص است که $Tr(\rho^2{}_A)=\frac{3}{4}$ . بنابراین $Tr(\rho^2{}_A)<1$ که نشان می‌دهد دو ذره در همتنیده هستند و معیار کیفی از میزان درهمتنیدگی دو ذره می‌دهد. برای پیدا کردن معیار کمی در همتنیدگی از تابع توافق برای اندازه‌گیری درهمتنیدگی استفاده می‌کنیم که به صورت $C_A=\sqrt{2(1-Tr(\rho^2{}_A))}$ تعریف می‌شود. اگر $C_A=1$ نشان دهنده درهمتنیدگی حداکثری است و اگر $C_A=0$ که دو ذره درهمتنیده نیستند. با توجه به اینکه برای حالت **(5)** داریم $Tr(\rho^2{}_A)=\frac{3}{4}$ مشخص است که $C_A=\frac{1}{\sqrt{2}}$ .

۲- با استفاده از این حالت ورودی و تابع $f$ پیشنهادی در مرجع [14]، خروجی‌های تابع به صورت جدول (۱) هستند.

جدول ۱: خروجی‌های الگوریتم تعمیم‌یافته دویچ

| شرط | خروجی |
|---|---|
| $f(0)=f(1)=0$ | $\|\psi_1\rangle_-=\alpha\|0\rangle[\frac{\|0\rangle-i\|1\rangle}{\sqrt{2}}]+\beta\|1\rangle[\frac{\|0\rangle-\|1\rangle}{\sqrt{2}}]$ |
| $f(0)=f(1)=1$ | $\|\psi_1\rangle_+=-i\alpha\|0\rangle[\frac{\|0\rangle+i\|1\rangle}{\sqrt{2}}]-\beta\|1\rangle[\frac{\|0\rangle-\|1\rangle}{\sqrt{2}}]$ |
| $f_2(0)=0$<br>$f_2(1)=1$ | $\|\psi_2\rangle_-=\alpha\|0\rangle[\frac{\|0\rangle-i\|1\rangle}{\sqrt{2}}]-\beta\|1\rangle[\frac{\|0\rangle-\|1\rangle}{\sqrt{2}}]$ |
| $f_2(0)=1$<br>$f_2(1)=0$ | $\|\psi_2\rangle_+=-i\alpha\|0\rangle[\frac{\|0\rangle+i\|1\rangle}{\sqrt{2}}]+\beta\|1\rangle[\frac{\|0\rangle-\|1\rangle}{\sqrt{2}}]$ |

خروجی‌های جدول را می‌توان به صورت خلاصه رابطه (۸) نوشت:

$$|\Psi_f\rangle=(-i)^{f(0)}\alpha|0\rangle[\frac{|0\rangle-i(-1)^{f(0)}|1\rangle}{\sqrt{2}}]+(-1)^{f(1)}\beta|1\rangle[\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}] \qquad (8)$$

از خروجی‌های جدول (۱) مشخص است که چگونه چهار خروجی متفاوت تابع منجر به توابع حالت متفاوت می‌شوند و می توان با یک بار اندازه‌گیری، ماهیت تابع را بدست آورد.

برای پیاده‌سازی مدل تعمیم یافته دویچ، یک راه استفاده از دروازه های کوانتومی است که در مرجع **[17]** پیشنهاد



[ Downloaded from jmrph.khu.ac.ir on 2026-05-22 ]

[ DOI: 10.61882/jmrph.9.2.15 ]

شده است. اما راه دیگر استفاده از روش آدیاباتیک کوانتومی است که بوسیله کریم‌خانی و همکاران در مرجع **[18]** پیشنهاد شده است. برای این منظور از روش استاندارد ساخت هامیلتونی آدیاباتیک کوانتومی در مراجع **[12]** و **[13]** مطابق دستورالعمل زیر استفاده شده است:

الف) در ساخت هامیلتونی برای الگوریتم تعمیم‌یافته دویچ، هامیلتونی‌های ورودی $H_I$ و هامیلتونی خروجی $H_f$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$H_I = I - |\Psi_I\rangle\langle\Psi_I| \qquad H_f = I - |\Psi_f\rangle\langle\Psi_f| \qquad \textbf{(9)}$$

که $I$ یک ماتریس واحد همانی ۴×۴ است. همچنین اگر $|\alpha\rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ و $|\beta\rangle = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$، آنگاه نماد $|\alpha\rangle\langle\beta|$ معرف ضرب تانسوری به صورت رابطه (۱۰) است:

$$|\alpha\rangle.\langle\beta| = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}(b_1^* \quad b_2^*) = \begin{pmatrix} a_1 b_1^* & a_1 b_2^* \\ a_2 b_1^* & a_2 b_2^* \end{pmatrix} \qquad \textbf{(10)}$$

ب) هامیلتونی سامانه به صورت رابطه (۱۱) تعریف می‌شود:

$$H(t) = (I - S(t))H_I + S(t)H_f \qquad \textbf{(11)}$$

که $S(t)$ یک تابع زمانی دلخواه است که در شرط‌های $S(0) = 0$ و $S(1) = 1$ صدق می‌کند.

با استفاده از ضرب تانسوری شکل صریح هامیلتونی به صورت زیر می شود:

$$H(t) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{|\alpha|^2}{2} & x|\alpha|^2 & \alpha\beta^* y & -\alpha\beta^* y \\ x^*|\alpha|^2 & 1 - \frac{|\alpha|^2}{2} & -i\alpha\beta^* y^* & i\alpha\beta^* y^* \\ \alpha^*\beta y & i\alpha^*\beta y & 1 - \frac{|\beta|^2}{2} & \frac{|\beta|^2}{2} \\ -\alpha^*\beta y^* & -i\alpha^*\beta y & \frac{|\beta|^2}{2} & 1 - \frac{|\beta|^2}{2} \end{pmatrix} \qquad \textbf{(12))}$$

که

$$x = \frac{i}{2}[[(-1)^{f(0)} + 1]S - 1] \qquad \textbf{(13)}$$

و

$$y = \frac{1}{2}[[(-1)^{f(1)+1}(-i)^{f(0)} + 1]S - 1] \qquad \textbf{(14)}$$

برای ادامه کار لازم است که مقادیر ویژه هامیلتونی پیدا شوند.. کریمخانی و همکاران در مرجع [۱۵] حالت‌های انرژی را به صورت رابطه (۱۵) بدست آوردند:

$$E_k = 2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos[\frac{1}{3}\arccos(\frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{-3}{p}} - \frac{2\pi k}{3})] - \frac{|\alpha|^2 - 1}{3}, \quad k = 0,1,2 \qquad \textbf{(15)}$$
$$E_c = 1$$

که در آن

$$p = \frac{2|\alpha|^2}{3} - \frac{|\alpha|^4}{12} - \frac{4}{3} - 4|\alpha|^2|\beta|^2|y|^2 - |\alpha|^2|x|^2 \qquad \textbf{(16)}$$

و

$$\begin{aligned} q = {} & \frac{2}{27}(|\alpha|^2 - 1)^3 - \\ & \frac{1}{3}(|\alpha|^2 - 1)[\frac{|\alpha|^4}{4} - 1 - 4|\alpha|^2|\beta|^2|y|^2 - |\alpha|^4|x|^2] + \\ & (1 - \frac{|\alpha|^2}{2})^2 + 4|y|^2(1 - \frac{|\alpha|^2}{2})|\alpha|^2|\beta|^2 + \\ & |\alpha|^2|x|^2(|\alpha|^2 - |\beta|^2) + |\alpha|^4|\beta|^2\frac{1}{2}\{[(-1)^{f(0)+1} - 1]i^{f(0)} \\ & +3 + (-1)^{f(0)}\}S^2 - |\alpha|^4|\beta|^2\frac{1}{2}\{(-1)^{f(0)+1} \\ & +2 + \frac{(-1)^{f(1)}}{2}[(-1)^{f(0)} - 1]i^{f(0)+1}\}S \end{aligned} \qquad \textbf{(17)}$$

[ Downloaded from jmrph.khu.ac.ir on 2026-05-22 ]

[ DOI: 10.61882/jmrph.9.2.15 ]

## ۳- انتخاب تابع زمان اجرای الگوریتم

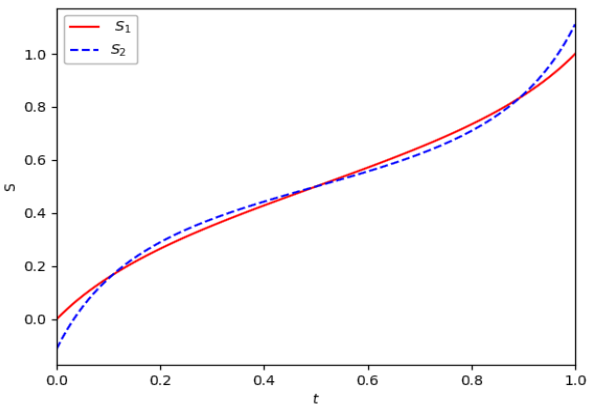
دربخش های پیش توانستیم یک فرمولبندی برای اجرای الگوریتم تعمیم یافته دویچ در چارچوب آدیاباتیک کوانتومی پیشنهاد کنیم. برای اجرای الگوریتم و رسم توابع انرژی احتیاج به انتخاب زمان برنامه الگوریتم $S$ داریم. در اینجا لازم است تاکید کنیم که سه نوع زمان در بررسی ما وجود دارد. اول زمان فیزیکی $t$، زمان بدون بعد $\tau$ که نسبت زمان فیزیکی به زمان کل است و سرانجام زمان الگوریتم $S$ است. دقت کنید که چون بررسی ما شبیه‌سازی یک الگوریتم در چارچوب آدیاباتیک کوانتومی است، الزامی ندارد که ارتباط زمان $\tau$ و $S$ بصورت خطی باشند. در واقع در مرجع **[19]** نشان داده شده که برای ایجاد مزیت رایانش کوانتومی بر رایانش کلاسیک بهتر است تابع $S$ به صورت زیر انتخاب شود:

$$s_1 = \frac{1}{2}\left(1+\frac{2\tau-1}{\sqrt{1+4\tau(1-\tau)}}\right) \qquad \textbf{(18)}$$

همچنین به تازگی در مرجع **[20]** نشان داده شده که در برخی از وضعیت ها بهتر است از تابع زیر استفاده شود.

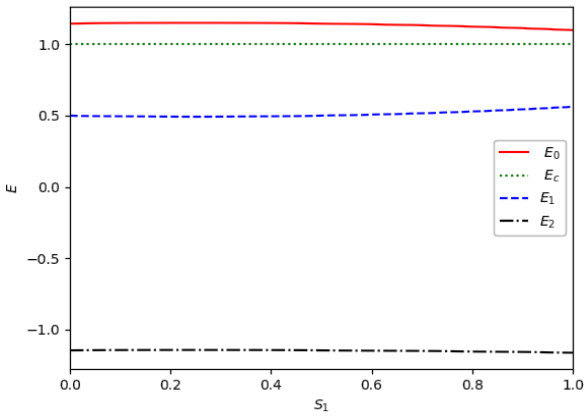
$$s_2 = \frac{1}{2}\left(1+\frac{\pi}{4}tg(2\tau-1)\right) \qquad \textbf{(18)}$$

در شکل (۱) دو تابع با همدیگر مقایسه شده‌اند.

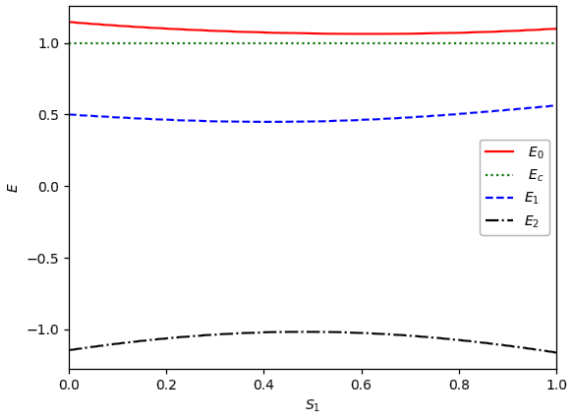



شکل ۱: مقایسه بین دو تابع زمانی اجرا الگوریتم.

حال با داشتن توابع زمانی اجرای الگوریتم، می‌توان ترازهای انرژی را رسم و اختلاف بین آنها را مطالعه کرد. شکل (۲) ترازهای انرژی سامانه برای زمان عملیاتی تابع $S_1$ و شکل (۳) ترازهای انرژی سامانه به ازای زمان عملیاتی $S_2$ را نشان می دهند. برای تحقیق اختلاف انرژی بین ترازهای انرژی، شکل‌های (۴) و (۵) به ترتیب به ازای زمان عملیاتی تابع $S_1$ و $S_2$ رسم شده‌اند.




(الف)

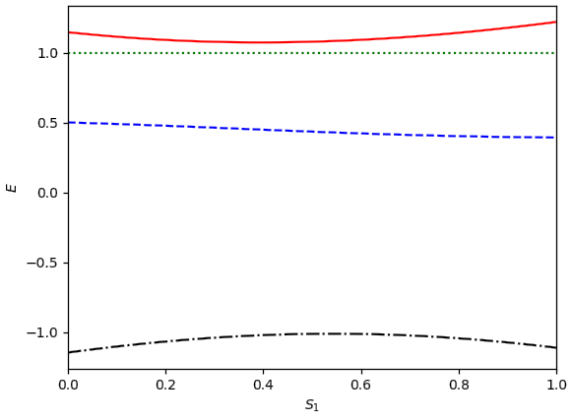



(ب)

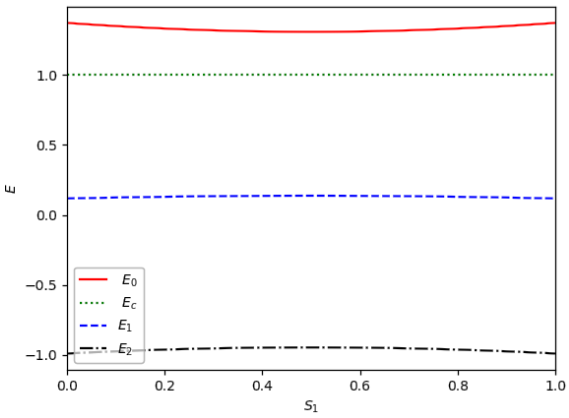


[ Downloaded from jmrph.khu.ac.ir on 2026-05-22 ]

[ DOI: 10.61882/jmrph.9.2.15 ]

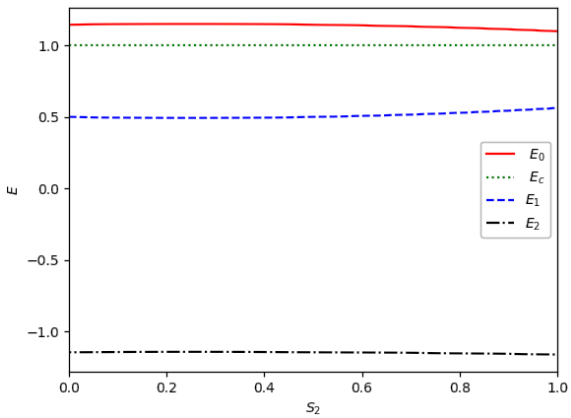



(ج)

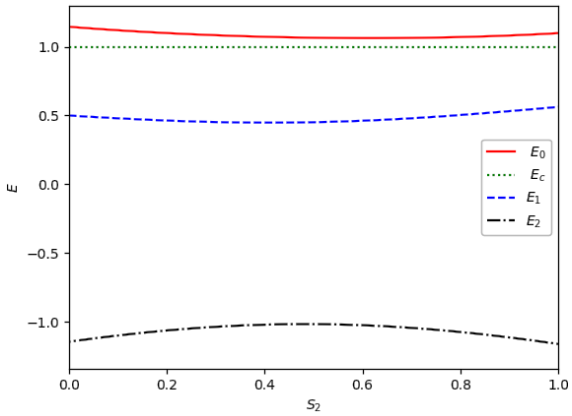



(د)

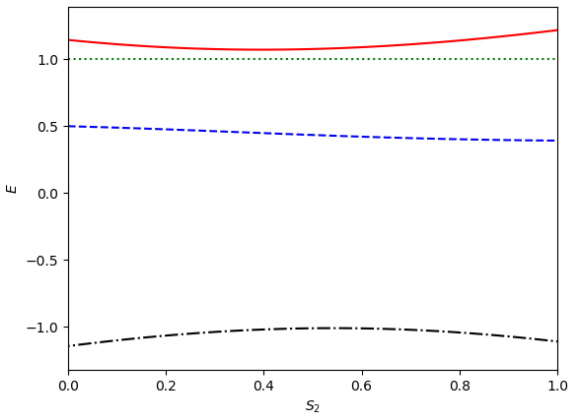
شکل ۲: ترازهای انرژی به ازای تابع زمان اجرای $S_1$ برای (الف) $f(\cdot)=f(1)=\cdot$ (ب) $f(\cdot)=\cdot, f(1)=1$ (ج) $f(\cdot)=1, f(1)=\cdot$ (د) $f(\cdot)=f(1)=1$



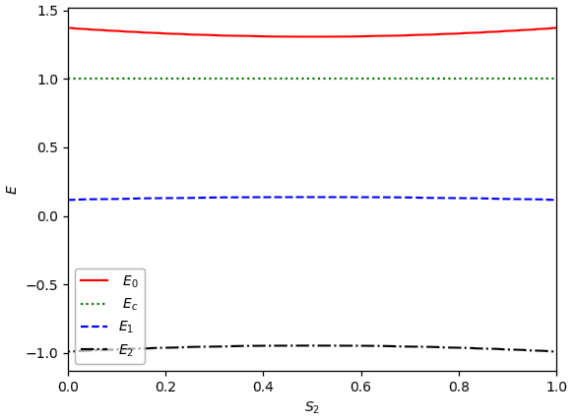

(الف)




(ب)




(ج)



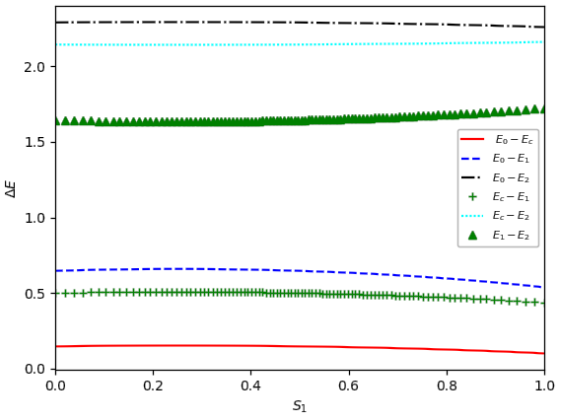

(د)

شکل ۳: ترازهای انرژی به ازای تابع زمان اجرای $S_2$ برای (الف) $f(\cdot)=f(1)=\cdot$ (ب) $f(\cdot)=\cdot, f(1)=1$ (ج) $f(\cdot)=1, f(1)=\cdot$ (د) $f(\cdot)=f(1)=1$

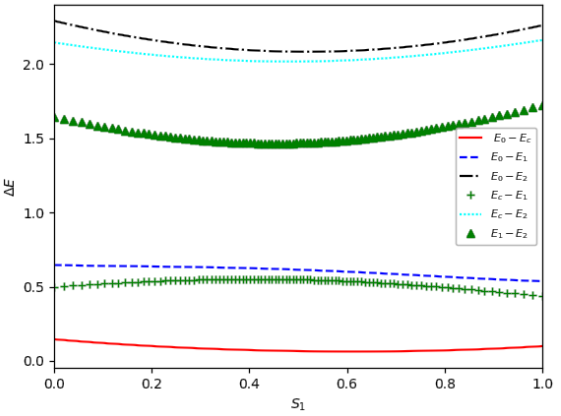


[ Downloaded from jmrph.khu.ac.ir on 2026-05-22 ]

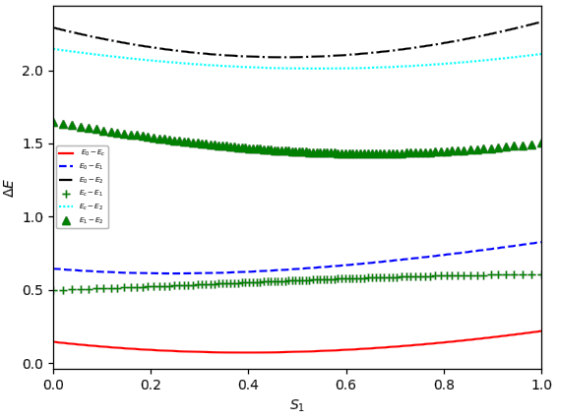
[ DOI: 10.61882/jmrph.9.2.15 ]



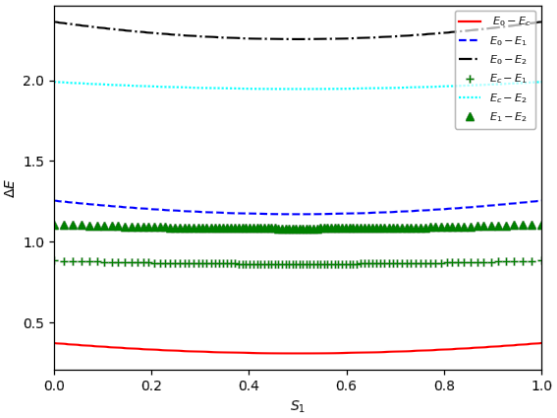

(الف)




(ب)

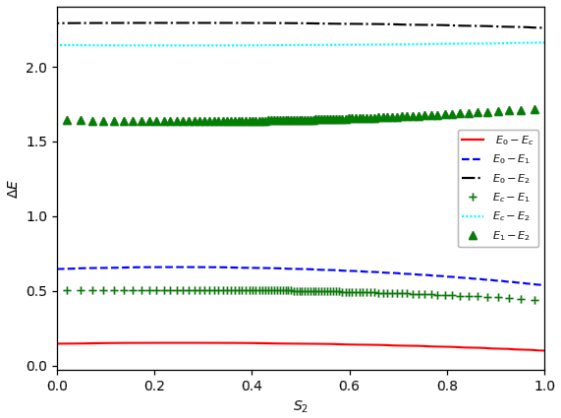



(ج)

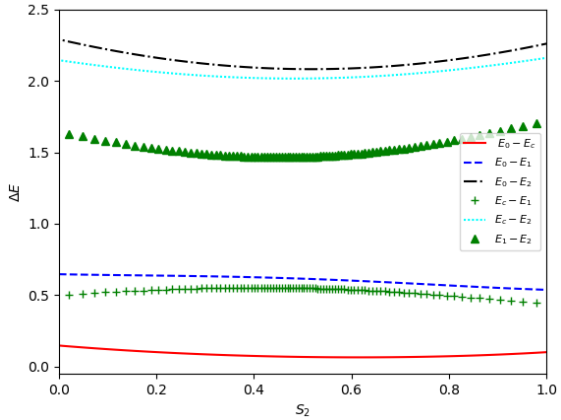



(د)

شکل ۴: اختلاف ترازهای انرژی به ازای تابع زمان اجرای $S_1$ برای (الف) $f(0)=f(1)=0$ (ب) $f(0)=0, f(1)=1$ (ج) $f(0)=1, f(1)=0$ (د) $f(0)=f(1)=1$



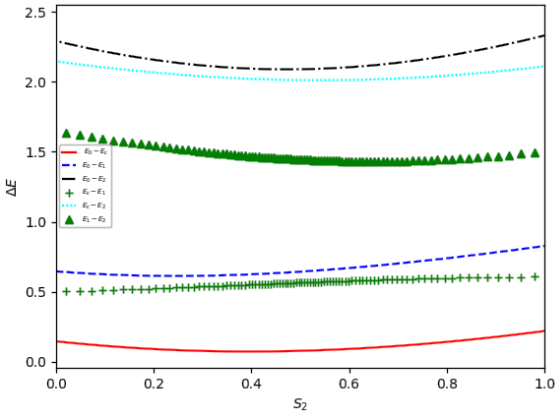

(الف)



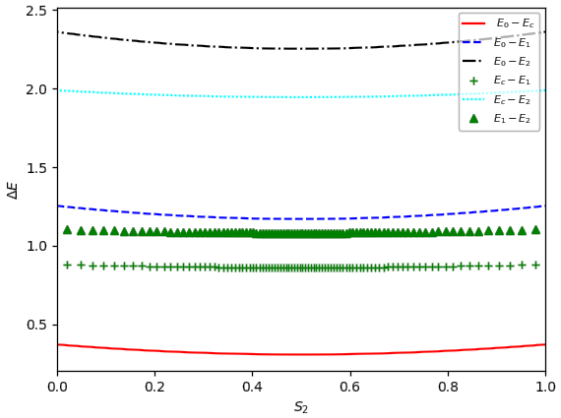

(ب)

[ Downloaded from jmrph.khu.ac.ir on 2026-05-22 ]

[ DOI: 10.61882/jmrph.9.2.15 ]




(ج)




(د)

شکل ۵: ترازهای انرژی به ازای تابع زمان اجرای $s_2$ برای (الف) $f(0)=f(1)=0$ (ب) $f(0)=0, f(1)=1$ (ج) $f(0)=1, f(1)=0$ (د) $f(0)=f(1)=1$

همانطور که از نمودارهای شکل‌های (۴) و (۵) مشخص است، اختلاف بین اولین تراز برانگیخته انرژی و تراز پایه به ازای توابع زمان اجرای الگوریتم، کوچکتر از ۱ است و بنابراین می‌توان برای الگوریتم از رایانش کوانتومی آدیاباتیک کمک گرفت.

.

## ۳- نتیجه گیری و بحث

در این مقاله تلاش شد که جنبه‌های بیشتری از الگوریتم تعمیم یافته دویچ مورد بررسی قرار گیرد. برای این منظور از چارچوب قضیه آدیاباتیک کوانتومی استفاده شد. بعد از فراهم کردن هامیلتونی مربوط به الگوریتم تعمیم یافته دویچ، رفتار زمانی الگویتم مورد مطالعه قرار گرفت. دو تابع اجرای استاندارد برای بدست آوردن توابع انرژی مورد مطالعه قرار گرفت. مشخص شد که شرایط آدیاباتیک کوانتومی در طول اجرای الگوریتم برقرار خواهند ماند و بنابراین می‌توان از چارچوب رایانش آدیاباتیک کوانتومی برای بررسی رفتار این سامانه استفاده کرد.

## منابع


[1] R. Rennie, *Oxford Dictionary of Physics*, 7rd ed., Oxford University Press, Oxford 2015.

[2] M. A. Nielsen and, I.L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information. Cambridge*, University Press, Cambridge, 2000; J. A. Buchmann, *Introduction to Quantum Algorithms*, American Mathematical Society, 2024.

[3] V. M. Kendon, K. Nemoto, W. J. Munro, *Quantum Analogue Computing*, Phil. Trans. R. Soc. A , 368:3621-3632, 2010 .

[4] T. Kadowaki, *Enhancing Quantum in Digital-Analog Quantum Computing*, APL Quantum, 1, 026101, 2024.

[5] D. Deutsch, "Quantum theory, the Church-Turing principle and the universal quantum computer," *Proc. R. Soc. Lond. A.*, vol. 400, no. 1818, pp. 97-117, 1985; D. Deutsch and R. Jozsa, "Rapid solution of problems by quantum computation," *Proc. R. Soc. Lond. A.*, vol. 439, no. 1907, pp. 553-558, 1992.

[6] E. Bernstein and U. Vazirani, "Quantum complexity theory," in *Proc.*


[ Downloaded from jmrph.khu.ac.ir on 2026-05-22 ]

[ DOI: 10.61882/jmrph.9.2.15 ]

*of the Twenty-Fifth Annual ACM Symp. on Theory of Computing*, *STOC'93*, pp. 11-20, San Diego, CA, USA, 16-18 May 1993.

[7] D. Coppersmith, *An approximate Fourier transform useful in quantum factoring*,IBM Reseach Report No. RC19642, 1994.

[8] P. W. Shor, *Polynomial-time algorithms for prime factorization and discrete logarithms on a quantum computer*, SIAM Journal on Computing, 26(5):1484–1509, 2005.

[9] L. K. Grover, *Quantum mechanics helps in searching for a needle in a haystack*, Physical Review Letters, 79(2):325–328, 1997.

[10] C. Durr and P. Høyer, *A quantum algorithm for finding the minimum*, arXiv:quant-ph/9607014, 1996.

[11] D. Janzing and P. Wocjan, *A simple promiseBQP-complete matrix problem*, Theory of Computing, 3:61–79, 2007.

[12] E. Farhi, J. Goldstone, S. Gutmann, and M. Sipser, *Quantum Computation by Adiabatic Evolution*, arXive: quant-ph/001106.

[13] A. M. Child, E. Farhi, and J. Preskill, "Robustness of adiabatic quantum computation," *Phys. Rev. A*, vol. 65, no. 1, pp. 0123220-01232210, Jan. 2002.

[14] S. Das, R. Kobes, and G. Kunstatter, "Adiabatic quantum computation and Deutsch's algorithm" *Phys. Rev. A*, vol. 65, no. 6, pp.0623100-0623107, Jun. 2002.

[15] T. Albash and D. A. Lidar "Adiabatic quantum computation", *Rev. Mod. Phys.*, vol. 90, no. 1, pp. 0150020-0150035, Jan./Mar. 2018.

[16] K. Nagata and T. Nakamura, "Some theoritically organized algorithm for quantum computer" *Int. J. Theor. Phys.*, vol. 59, no. 2, pp. 611-621, 2020.

[17] K. Nagata and T. Nakamura, "Generalization of Deutsch's algorithm" *Int. J. Theor. Phys.*, vol. 59, no. 8, pp. 2557-2661, 2020

[18] آرش کریم خانی و امیر قلعه, "بهینه‌سازی حالت‌های اولیه برای رایانش کوانتومی آدیاباتیک در یک الگوریتم کوانتومی," *مهندسی برق و مهندسی کامپیوتر ایران* , جلد ۲۱, شماره ۴, pp. 291-295, 1402.

[19] J. Roland and N. J. Cerf, "Quantum search by local adiabatic evolution", Phys. Rev. A, vol. 65, p. 042308, 2002.

[20] S. A. Adamson∗ and P. Wallden," Adiabatic quantum unstructured search in parallel", ArXiv:2502.08594.

[ Downloaded from jmrph.khu.ac.ir on 2026-05-22 ]

[ DOI: 10.61882/jmrph.9.2.15 ]

JMRPh. (9)(2): 15-25, Autumn & Winter 2024

# Exploring Quantum Adiabatic Conditions in a Generalized Quantum Algorithm

[1] Arash Karimkhani, [2] Amir Ghale'e

[1*] Department of Electrical Engineering, Tafresh University, Tafresh, Markazi, Iran

[2] Department of Physics, Tafresh University, Tafresh, Markazi, Iran

**Article details**

Received: 2025/03/16
Accepted: 2025/06/30
Published: 2025/07/07

ISSN: 2588-493x
eSSN: 2588-4821

Correspondence email: karimkhani@tafreshu.ac.ir

## Abstract

Quantum adiabatic computing provides a framework for simulating quantum algorithms grounded in established quantum mechanics theorems. The quantum adiabatic theorem defines the conditions for the adiabatic transformation of quantum systems, but verifying these conditions demands careful scrutiny. This study focuses on the generalized Deutsch algorithm within the realm of quantum adiabatic computing. The time-dependent Hamiltonian is analyzed by evaluating the system's input and output states. The input state is a two-particle quantum entangled state, while the four output states represent the system's computational results. The allowed energy levels of the computational system are derived as the eigenstates of the Hamiltonian. By plotting these energy levels, the differences between them are quantified. Standard runtime functions are employed to validate the computational system, and various scheduled time functions are used to examine the applicability of the quantum adiabatic theorem to the generalized Deutsch algorithm. Analysis of the energy gaps between excited states and the ground state confirms that the proposed Hamiltonian satisfies adiabatic conditions throughout the algorithm's execution.

***Keywords:*** generalized Deutsch algorithm, Energy level, Quantum Computing, Quantum Adiabatic Computing.

[ Downloaded from jmrph.khu.ac.ir on 2026-05-22 ]

[ DOI: 10.61882/jmrph.9.2.15 ]