برشی سازگار از ابرگرانش ۱۱ بعدی، (شبه)اسکالرها در فضای $\mathrm{AdS_4}$ و جواب های دقیق دوگان در نظریه میدان سه بعدی مرزی

محمد نقدی

گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه ایلام

دریافت: ۱۴۰۲/۱۱/۲ پذیرش: ۱۴۰۳/۸/۲۷

چکیده

با شروع از ابرگرانش ۱۱ بعدی روی فضای $AdS_4 \times CP^3 \ltimes S^1/Z_k$، با اضافه کردن یک ۴- فرم قدرت- میدان جدید، یک تقلیل کالوزا-کلاین سازگار به دست می آوریم. در واقع (شبه)اسکالر های $SU(4) \times U(1)$- تکتایه حاصل در فضای آنتی دوسیته اقلیدسی چهاربعدی، در نتیجه خمش (پاد)غشاءهای ام کاوشگر، در زمینه ویک چرخیده[1] ، حول جهت های فضای داخلی هستند و نظریه پادغشاهای M2 حاصل تمام ابرتقارن های نظریه اصلی و پاریته را نیز می شکنند. بعلاوه، جواب آزمایشی حجمی و معادله (اسکالر) حاصل، ناوردایی مقیاس را نیز می شکنند. با در نظرگرفتن پس کنش روی فضای خارجی و داخلی، معادلات حاصل متناظر با عملگرهای حاشیه ای دقیق ($\Delta_+ = 3$) و به طور حاشیه ای نامربوط مرزی خواهند بود. با ارائه حل دقیقی برای معادله با پس کنش و نیز حل تقریبی معادله اصلی حجمی در حد کاوشی برای مد بی جرم ($m^2 = 0$) و یک مد جرم دار ($m^2 = 40$) با روش های ریاضیاتی و به ویژه روش تجزیه آدومیان، جواب‌های اختلالی مناسب تحلیل های نزدیک مرز را به دست می‌آوریم. چنین جواب هایی حداقل دارای تقارن $SO(4)$ و معرف اینستنتون های مسئول تونل زنی در میان خلاءهای نسبتا تبهگن پتانسیل اسکالر هگیزگونه و یا حباب خلاء واقعی برخاسته از میان خلاء کاذب در قالب جواب های جستان خواهد بود. برای تحقق تقارن های حجمی و به ویژه شکست ابرتقارن، سه نمایش بنیادی گروه $SO(8)$ برای گراویتینو را مبادله می کنیم و در نتیجه خواهیم توانست (شبه)اسکالرهای تکتایه مطلوب را در طیف مربوطه محقق نماییم. به همین ترتیب، با تمرکز به بخش $U(1) \times U(1)$ از گروه پیمانه ای ضربی نظریه چرن-سایمون- ماده سه بعدی مرزی (مدل ABJM)، در نظر گرفتن یک اسکالر و یک فرمیون و ارائه عملگرهای دوگان حاشیه ای و نامربوط ($\Delta_+ = 8$) مختلف و تغییر شکل نظریه مرزی با آنها، جواب های دقیق با کنش متناهی را خواهیم یافت که در واقع اینستنتون های کوچک روی یک سه کره در بینهایت خواهد بود. به علاوه، با استفاده از قواعد دوگانی $\mathrm{AdS_4/CFT_3}$، تناظر حالت- عملگر را در مرتبه اصلی تصدیق و عناصر جواب های حجمی و مرزی را نیز منطبق خواهیم ساخت.

[1] skew-whiffed

[DOI: 10.61882/jmrph.7.2.21]

واژگان کلیدی: ابرگرانش ۱۱ بعدی، برش سازگار، (شبه)اسکالرها در فضای $\mathrm{AdS_4}$، روش تجزیه آدومیان، تناظر $\mathrm{AdS_4/CFT_3}$، عملگرهای مرزی دوگان، اینستنتون‌ها.

مقدمه

تقلیل کالوزا-کلاین یا فشرده سازی نظریه های ابعاد بالا به نظریه یا مدل های در ابعاد پایین، موضوعی مهم در نظریه ریسمان است؛ چراکه اگر چنین نظریه ای صحیح باشد، لازم است نظریه ها و نتایج قبلا شناخته و تائید شده و به ویژه مدل استاندارد ذرات بنیادی از دل آنها بیرون آید. در همین راستا و در این نوشته، در ادامه یک مجموعه پژوهش در این زمینه، از جمله [۱]-[۵]، اکنون نیز یک برش سازگار[۲] از ابرگرانش ۱۱ بعدی به یک مدل گرانشی چهار بعدی را در نظر می گیریم و به دنبال یافتن جواب های دقیق غیراختلالی به شکل اینستنتون خواهیم بود.

مدل پایه ای که در اینجا نظر می گیریم، مدل آهارونی، برگمن، جفریز و مالداسنا (ABJM)[۳] [۶]، به عنوان بهترین نمونه شناخته شده تناظر $\mathrm{AdS_4/CFT_3}$ تاکنون است. کنش این مدل توصیف گر جهان- حجم Nغشای M2 متقاطع در تکینگی اوربیفلد[۴] گروه دوری Z_k (یا نوک مخروط C^4/Z_k) با حد نزدیک افق $AdS_4 \times S^7/Z_k$ همراه با $N' = k\,N$ واحد از شار ۴- فرم روی هفت کره داخلی است. در حد توفت N بزرگ و $\lambda = N/k$ ثابت (k در اینجا نشانگر تراز چرن است)، زیرگروه $SU(4) \times U(1) \equiv H$ از گروه اصلی $SO(8) \equiv G$ باقی می‌ماند. این توصیف در حد $N \ll k^5$ (فضای به طور ضعیف خمیده) معتبر است و در حد k بزرگ که دایره نظریه ام کوچکتر می شود، یک توصیف بهتر برحسب ابرگرانش ۱۰ بعدی روی $AdS_4 \times CP^3$ (با هفت کره به صورت یک کلاف تاری S^1 روی CP^3) وجود دارد. نظریه مرزی سه بعدی آن یک نظریه پیمانه ای $U(N)_k \times U(N)_{-k} \equiv \mathcal{G}$ چرن- سایمون (CS)[۵] مرکب از میدان های اسکالر و فرمیونی در نمایش های دو بنیادی[۶] گروه H و با ابرتقارن $\mathcal{N} = 6$ است؛ و البته برای $k = 1,2$، ابرتقارن به $\mathcal{N} = 8$ و تقارن به G ارتقاء می یابد.

در اینجا با بدون تغییر گذاشتن زمینه هندسی ABJM و شامل کردن یک ۴- فرم قدرت- میدان جدید، ما در نهایت به برشی سازگار از نظریه ۱۱ بعدی فوق به مدلی گرانشی در فضای آنتی دوسیته چهاربعدی اقلیدسی ($\mathrm{E}AdS_4$) منتهی می شویم. در واقع با حل معادلات ابرگرانشی مربوطه، خواهیم دید که (شبه)اسکالرهای حاصل هیگزگونه هستند و سازوکار شکست خودبخود تقارن نیز وجود دارد. سپس، از حل معادله دیفرانسیل مرتبه دوم غیرخطی با مشتقات جزئی، با در نظر گرفتن پس کنش[۷] روی فضاهای داخلی ($CP^3 \ltimes S^1/Z_k$) و خارجی (AdS_4)، یعنی با صفر قرار دادن تانسورهای انرژی-تکانه-تنش، مربوط به ۴- فرم در نظرگرفته شده، در طرف دوم معادلات اینشتین و حل

[2] Consistent truncation
[3] Aharony, Bergman, Jafferis and Maldacena
[4] Orbifold
[5] Chern-Simons
[6] Bi-fundamental
[7] Backreaction

[DOI: 10.61882/jmph.7.2.21]

همزمان معادلات اسکالر حاصل با معادله اسکالر اصلی حجمی، خواهیم دید که معادلات حاصل برای (شبه)اسکالرهای بی جرم و جرم دار متناظر با عملگرهای حاشیه ای دقیق و به طور حاشیه ای نامربوط[8] خواهند بود؛ و البته جواب دقیقی برای آن ارائه می دهیم. از طرفی دیگر، در حد کاوشی، یعنی چشمپوشی از پس کنش جواب ها روی هندسه زمینه، برای مد بی جرم ($m^2 = 0$) و یک مد جرم دار ($m^2 = 40$)، جواب های مختلفی را با استفاده از روش های حل معادلات دیفرانسیل و به ویژه روش تجزیه آدومیان (ADM)[9] [۷] به صورت بسط سری در نزدیک مرز فضای $EAdS_4$ به دست می آوریم که برای تحلیل های مبتنی برتناظر $\mathrm{AdS}_4/\mathrm{CFT}_3$ مفید خواهد بود.

از طرفی دیگر، تنظیمات و جواب های حجمی ما باعث شکستن ناوردایی پاریته می شود؛ چراکه در واقع (شبه)اسکالرهای حاصل را می توان منتسب به (پاد)غشاءهای ام خمیده شده حول جهت های فضای داخلی در زمینه (اصلی ویک چرخیده:WR [10]) skew-whiffed (SW) در نظر گرفت، به طوری که در نهایت نظریه اصلی برای غشاءهای M2، تبدیل به نظریه ای برای پادغشاءهای M2 می شود. به علاوه تمام ۳۲ ابرتقارن نیز طبق قواعد تقاطع غشاءها- برای نمونه [۸] را ببینید- می شکند ($\mathcal{N} = 8 \to 0$). همچنین، با شکستن ناوردایی مقیاس توسط جواب های حجمی و با وجود جملات جرمی در معادلات، گروه ایزومتری $SO(4,1)$ فضای $EAdS_4$ به $SO(4)$ تقلیل می‌یابد. در نتیجه، برای تحقق شکست ابرتقارن و اینکه (شبه)اسکالرهای ما $H-$ تکتایه (از این پس آن را صرفا "تکتایه" می نویسیم) (یعنی در نمایش 1_0) هستند، سه نمایش بنیادی 8_s ، 8_c و 8_v گروه G برای گراویتینو را مبادله می کنیم که در نتیجه آن می توانیم (شبه)اسکالرهای مطلوب را در چندتایه های مختلف طیف ابرگرانش ۱۱ بعدی در فضای مورد اشاره محقق سازیم. برای تحقق شکست پاریته نیز به یک بخش $U(1)$ از گروه پیمانه‌ای ضربی اصلی $\mathcal{G}$ متمرکز می شویم (در واقع دوگان این جواب های حجمی را می توان در کل در بخش تکتایه نظریه های میدان برداری $U(N)$ و $O(N)$ چرن- سایمون محقق ساخت). سپس، با در نظر گرفتن یک اسکالر، یک فرمیون و یک میدان پیمانه ای، عملگرهای تکتایه مرزی را ارائه و سپس کنش مرزی ABJM را با آنها طبق قواعد تناظر گرانش- پیمانه، تغییرشکل های [11] حاشیه ای و نامربوط داده و در نهایت جواب هایی دقیق با کنش های متناهی، متناظر با به ترتیب مدهای بی جرم و جرم دار حجمی در نظر گرفته شده، به دست می آوریم که در واقع از نوع اینستنتون های کوچک روی یک سه کره با شعاع در بینهایت خواهد بود. چنین جواب هایی که می توانند توصیف گر واپاشی خلاء یا تونل زنی های کوانتومی نیز باشند، در واقع متناظر با رشد و گسترش حباب های خلاء واقعی[12] در زمینه خلاء کاذب حجمی هستند که در قالب جواب‌های جستان[13]، پس از کار اولیه کولمن- دی لوچیا (CdL)[14] [۹]، مطالعه شده اند و البته،

[8] Exactly marginal and marginally irrelevant operators
[9] Adomian decomposition method
[10] Wick-rotated
[11] Deformations
[12] True-vacuum bubbles
[13] Bounce solutions
[14] Coleman-de Luccia

[DOI: 10.61882/jmph.7.2.21]

سرنوشت نهایی چنین حباب هایی، یک فروپاشی یا نابودی بزرگ[15] در فضای آنتی دوسیته خواهد بود [۱۰]. به همین ترتیب، تناظر حالت- عملگر یا مطابقت جواب های حجمی و مرزی به دست آمده را نیز تصدیق و نکات جالب توجه دیگری را در مورد این جواب ها و تفسیرهای مرتبط ارائه خواهیم کرد.

ساختار این مقاله به صورت زیر است: در بخش بعدی/دوم، جواب آزمایشی ابرگرانشی ۱۱ بعدی، حل معادلات مربوطه و معادلات حاصل در فضای $\mathrm{E}AdS_4$ در حد کاوشی و همچنین با احتساب پس کنش و یک جواب دقیق ارائه می شود. در بخش سوم، جواب هایی را برای معادله اصلی حجمی در حد کاوشی، با روش های اختلالی معمول ارائه و پس از بیان مقدماتی از روش تجزیه آدومیان، چندین جواب را به صورت بسط سری نزدیک مرز با این روش نشان می دهیم. در بخش چهارم، در مورد تقارن های جواب های حجمی و در نتیجه الزامات نظریه های دوگان مرزی و نیز قواعد تناظر AdS/CFT برای اسکالرها بحث می کنیم. در بخش پنجم، با ارائه کنش مرزی و عملگرهای حاشیه ای و نامربوط مختلف، کنش را با آن تغییر و جواب های مختلفی را به دست آورده و تناظر حالت حجمی- عملگر مرزی را نیز تصدیق می کنیم. در بخش ششم/پایانی، ضمن مرور مختصر این مطالعه و نتایج، به نکات و موارد مرتبط و قابل توجه دیگر اشاره می شود.

معادلات اسکالر در فضای $\mathbf{AdS_4}$ حاصل از تقلیل ابرگرانش ۱۱ بعدی

با شروع از ابرگرانش ۱۱ بعدی در زمینه هندسی $AdS_4 \times S^7/Z_k$، هنگامی که فضای داخلی به صورت یک کلاف تاری S^1/Z_k روی CP^3 در نظر گرفته می شود، جواب آزمایشی زیر را برای ۴- فرم قدرت- میدان آن به کار می بریم:

$$G_4 = R\, f_1\, G_4^{(0)} +\ R^4\, df_2 \wedge J \wedge e_7 +\ R^4\, f_3\, J^2; \qquad (۱)$$

که در آن e_7 ویلبین هفتم فضای داخلی، J ۲- فرم کیلر[16] روی فضای تصویری مختلط CP^3، $R = 2R_{AdS}$ شعاع انحنای فضای آنتی‌دوسیته، $G_4^{(0)} = (3/8)R^3\mathcal{E}_4 = N\mathcal{E}_4$ میدان زمینه مدل ABJM با $\mathcal{E}_4$ به عنوان ۴- فرم حجمی واحد و f_1 ، f_2 و f_3 اسکالرهایی در فضای خارجی هستند.

اکنون با استفاده از جواب آزمایشی (۱) و دوگان آن $G_7 = * G_4$ (که عمل ستاره در ۱۱ بعد است) در معادله حرکت و اتحاد بیانکی ابرگرانش ۱۱ بعدی، یعنی

$$dG_4 = 0, \qquad dG_7 - \frac{i}{2} G_4 \wedge G_4 = 0 \qquad (۲)$$

که ضریب i آن به سبب بودن در فضای اقیلدسی است، به دست می آوریم- برای جزئیات بیشتر [۵] را نیز ببینید:

$$f_1 = \frac{i}{2}\, R^2\, f_3^2 + i\, C_1, \qquad f_3 = f_2 + \frac{C_2}{R} \qquad (۳)$$

[15] Big-crunch
[16] Kähler

[DOI: 10.61882/jmph.7.2.21]

$$\Box_4 f_3 - \frac{4}{R^2}(1 \pm 3C_1) f_3 - \lambda f_3^3 = 0, \tag{۴}$$

که در آن C_1 ، C_2 و ... ثابت‌های حقیقی، $\lambda = 6$ ، $\Box_4$ لاپلاسین در فضای $EAdS_4$ است و علامت بالایی و پایینی ($\pm$) در پشت جمله شامل C_1 به ترتیب نسخه WR و SW زمینه را نشان می‌دهند و توجه داریم که با $C_1 = 1$ (و البته $f_3 = 0$) همان زمینه ABJM محقق می شود. همچنین قابل توجه است که پتانسیل اسکالر (از حالا به بعد $f_3 \equiv f$) که از معادله (۴) نیز مشخص است، بدون جمله ثابت کیهانشناسی، عبارت است از:

$$V(f) = \frac{m^2}{2} f^2 + \frac{\lambda}{4} f^4 \tag{۵}$$

که با $m^2 < 0$ از نوع چاه دوگانه است که جواب های اینستنتون‌گونه و یا بونس های CdL را می پذیرد که در مدل های کیهان شناختی جهان اولیه و مدل های تورمی حائز اهمیت است؛ برای نمونه [۱۱] را ببینید.

در نظر گرفتن پس کنش، معادلات و جواب حاصل

از آنجا که موجودات توپولوژیک مانند اینستنتون ها، به عنوان جواب های جایگزیده، نباید پس کنشی روی هندسه زمینه داشته باشند، لذا چنین جواب هایی از حل همزمان معادلات حاصل از صفر قراردادن تانسورهای انرژی-تکانه-تنش معادلات اینشتین با معادله اصلی حجمی به دست می آیند. به این منظور، معادلات اینشتین را به شکل زیر می نویسیم:

$$\mathcal{R}_{MN} - \frac{1}{2} g_{MN} \mathcal{R} = 8\pi\, \mathcal{G}_{11} T_{MN}^{G_4}, \tag{۶}$$

$$T_{MN}^{G_4} = \frac{1}{4!}\left[4\, G_{MPQR}\, G_N^{PQR} - \frac{1}{2} g_{MN}\, G_{PQRS}\, G^{PQRS}\right], \tag{۶ الف}$$

که در آن $\mathcal{G}_{11}$ ثابت نیوتن ۱۱ بعدی است و اندیس های لاتین بزرگ $M, N, \ldots$، کوچک $m, n, \ldots$ و یونانی $\mu, \nu, \ldots$ به ترتیب برای فضای ۱۱ بعدی کامل، ۶ بعدی داخلی CP^3 و ۴ بعدی خارجی AdS_4 هستند. سپس، مولفه های متناظر تانسورهای انرژی-تکانه-تنش را برای جواب آزمایشی (۱) محاسبه می کنیم- برای جزئیات بیشتر از چنین محاسباتی، [۱] و [۵] را ببینید- و در نهایت از صفر قراردادن مولفه های خارجی و داخلی به ترتیب به دست می آوریم:

$$\Box_4 f + \frac{4}{R^2}(4 \pm 12\, C_1) f + 24 f^3 = 0, \tag{۷}$$

$$\Box_4 f + \frac{4}{R^2}(1 \pm 9\, C_1) f + 18 f^3 = 0; \tag{۸}$$

با این توجه که معادله مربوط به مولفه یازدهم، S^1/Z_k ، دقیقا همان معادله اصلی حجمی (۴) است.

[DOI: 10.61882/jmph.7.2.21]

در نتیجه، از حل همزمان دو معادله اخیر با معادله اصلی حجمی، در حالت کلی معادله ای به صورت زیر حاصل می شود:

$$\Box_4 f - m^2 f = 0. \tag{۹}$$

در واقع، برای اقناع همزمان معادله (۴) با (۷)، یعنی لحاظ کردن پس کنش جواب روی فضای خارجی، باید در (۹) $m^2 R_{Ads}^2 = 0$ باشد که متناظر با عملگر حاشیه ای دقیق در نظریه مرزی است؛ و به همین ترتیب برای اقناع همزمان (۸) و همچنین (۷) و (۸) با (۴) که به ترتیب متناظر با لحاظ کردن پس کنش جواب روی فضای داخلی و همچنین کل فضای ۱۱ بعدی است، به ترتیب مدهای $m^2 R_{Ads}^2 = 1/2$ و $m^2 R_{Ads}^2 = 2/9$ را در (۹) متناظر با عملگرهای به طور حاشیه ای نامربوط $\Delta_\pm = (3/2) \pm (\sqrt{11}/2)$ و $\Delta_\pm = (3/2) \pm (\sqrt{(89/9)}/2)$ داریم؛ با این توجه که $\Delta_\pm = (3/2) \pm \nu$ با $2\,\nu = \sqrt{9 + 4\,m^2}$، ریشه‌های کوچکتر و بزرگتر معادله $m^2 = \Delta(\Delta - 3)$ در فضای AdS_4 است.

از طرفی دیگر، اگرچه می توان معادله (۹) را با روش های معمول حل معادلات دیفرانسیل (از جمله روش تجزیه متغیرها) حل کرد؛ اما یک جواب دقیق شناخته شده از آن (جواب ویتن)- [۱۲] و [۱۳] را ببینید- به صورت زیر وجود دارد:

$$f(u, \vec{u}) = \bar{C}_{\Delta_+} \left(\frac{u}{u^2 + (\vec{u} - \vec{u}_0)^2} \right)^{\Delta_+}, \quad \bar{C}_{\Delta_+} = \frac{\Gamma(\Delta_+)}{\pi^{3/2}\, \Gamma(\nu)}; \tag{۱۰}$$

که در استخراج آن از متریک $EAdS_4$ در مختصات نیم صفحه بالایی پوانکاره و لاپلاسین زیر استفاده شده است:

$$ds_{EAdS_4}^2 = \frac{R^2}{4\,u^2}(du^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2) \tag{۱۱}$$

$$\Box_4 f = \frac{4\,u^2}{R^2} \left(\partial_i \partial_i + \partial_u \partial_u - \frac{2}{u} \partial_u \right) f. \tag{۱۲}$$

که در آن $\vec{u} = (x, y, z)$ و $\partial_i \partial_i = \nabla^2$ لاپلاسین سه بعدی است.

حل معادله غیرخطی جرم دار به روش تجزیه آدومیان

ابتداء معادله (۴) را با استفاده از (۱۲) و تغییر (همدیس) $f = (u/R_{Ads})\, g$ به صورت زیر می نویسیم:

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial u^2} - \frac{(2 + m^2)}{u^2} \right] g(u, r) - \lambda_4\, g(u, r)^3 = 0 \tag{۱۳}$$

[DOI: 10.61882/jmph.7.2.21]

که در آن از مختصات کروی با $r=|\vec{u}|$ استفاده نموده و بخش های زاویه ای را کنار گذاشته ایم. قسمت خطی معادله اخیر را می توان با روش معمول جداسای متغیرها حل کرد که جواب حاصل ترکیبی از توابع هذلولوی یا مثلثاتی برای بخش r و توابع بسل یا بسل اصلاح شده برای بخش u است؛ و سپس، می توان از آن جواب به عنوان پایه ای برای به دست آوردن جواب های تقریبی با روش های اختلالی مختلف استفاده کرد.

در واقع با معادله اخیر برای f، با استفاده از جواب آزمایشی به صورت $f(u,r)=F(\xi)$ با $\xi=u^{1/2}\,f(r)$ ([۵] را ببینید) و همچنین استفاده از روش تقلیل خود- همانند[17] ([۲] را ببینید) یا دیدگاه گروه لی ([۳] را ببینید) با $\xi=r/u$، جواب های هنجارش پذیر تا مرتبه اول بسط اختلالی، به ترتیب عبارتند از:

$$f^{(1)}(u,r)=C_3\,[u\,f(r)^2]^{\Delta_+}, \tag{۱۴}$$

$$f^{(1)}(u,r)=\left[C_4+C_5\,\ln\left(\frac{r}{u}\right)\right]\left(\frac{u}{r}\right)^{\Delta_+}. \tag{۱۵}$$

با این وجود، ما در اینجا به ویژه از روش تجزیه آدومیان (به عنوان روش معادل دیگرکه قبلا توسط دیگران در این موارد، مورد استفاده قرار نگرفته است) برای به دست آوردن جواب های اختلالی به صورت بسط سری استفاده می کنیم که برای تحلیل های نزدیک مرز ($u=0$) مناسب است.

در واقع، روش تجزیه آدومیان یا روش عملگر معکوس [۷] ([۱۴] را نیز ببینید)، به ویژه برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی غیرخطی کارآمد است. چون در اینجا ما علاقمند به رفتار نزدیک مرز جواب های هنجارش پذیر برای مدهای جرم دار به شکل

$$f(u\to 0,r)\equiv\ f(0,r)=f(r)\,u^{\Delta_+}\approx\bar{C}_{\Delta_+}\left(\frac{u}{r}\right)^{\Delta_+} \tag{۱۶}$$

هستیم که عبارت طرف راست آن همان حد نزدیک مرز (۱۰) است-که خود آن هم جواب قسمت خطی (۱۳) است- لذا می توان همین جواب اخیر که متناظر با شرط مرزی دیریکله است را به عنوان داده اولیه در روش آدومیان به کار برد. یا به طور دقیق تر، می توان از عبارت

$$g_0(0,r)=g(0,r)-u\,\frac{\partial g(0,r)}{\partial u} \tag{۱۷}$$

در معادله تکرار زیر استفاده کرد:

$$\bar{\Box}_4 g_{n+1}-\bar{\mathrm{M}}^2\,g_{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}A_n \tag{۱۸}$$

که در آن

[17] Self-similar reduction

[DOI: 10.61882/jmph.7.2.21]

$$\bar{\Box}_4 \equiv \partial_i\partial_i + \partial_u\partial_u, \qquad \bar{\mathrm{M}}^2 \equiv \frac{(2+m^2)}{u^2} \tag{۱۸الف}$$

و چندجمله‌ای‌های آدومیان A_n از جملات غیرخطی می آیند و در نقش اختلال عمل می کنند که در مورد معادله (۱۳) به صورت زیر هستند- برای جزئیات بیشتر [۳] و [۵] را نگاه کنید:

$$A_0 = 6g_0^3, \qquad A_1 = 18\, g_0^2\, g_1, \qquad A_2 = 18\, (g_0^2\, g_2 + \ g_0\, g_1^2), \dots . \tag{۱۸ب}$$

به این ترتیب، می توان یک جواب سری را تا مرتبه n ام بسط، به صورت زیر نوشت:

$$f^{(n)} = \sum_{n=0}^{n} f_n \,. \tag{۱۹}$$

از طرفی دیگر، معادله (۱۳) بدون جمله $\bar{\mathrm{M}}^2$ دارای جواب دقیق زیر است- [۱۵] را ببینید:

$$\tilde{g}_0(u,\vec{u}) = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\frac{b_0}{-b_0^2 + (u+a_0)^2 + (\vec{u}-\vec{u}_0)^2}, \tag{۲۰}$$

که در آن $\vec{u}_0 \equiv (b_1, b_2, b_3)$ با a_0 و b_i ها به عنوان مدول‌های جواب، می توانند به ترتیب نشان دهنده اندازه و مکان اینستنتون روی مرز باشند. این جواب دارای رفتار نزدیک مرزی به صورت زیر است:

$$\tilde{g}_0(u \to 0, r) \equiv \tilde{g}_0(0,r) = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{b_0}{(a_0^2 - b_0^2 + r^2)}\left[1 - \frac{2\, a_0}{(a_0^2 - b_0^2 + r^2)}\ u\right]; \tag{۲۰الف}$$

و لذا می توان همین را، مشابه (۱۶)، به عنوان داده اولیه در روش آدومیان به کار برد؛ و یا آن را برای نوشتن شرط اولیه ای طبق (۱۷) در معادله تکرار زیر استفاده کرد:

$$\bar{\Box}_4 \tilde{g}_{n+1} - 6\, \tilde{g}_{n+1}^3 = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{A}_n \tag{۲۱}$$

که در آن چندجمله‌ای‌های آدومیان $\tilde{A}_n$ به صورت زیر است:

$$\tilde{A}_0 = \bar{\mathrm{M}}^2\, \tilde{g}_0\,, \qquad \tilde{A}_1 = \bar{\mathrm{M}}^2\, \tilde{g}_1, \dots . \tag{۲۱الف}$$

به همین ترتیب، می توان از (۱۳) معادله تکرار را به صورت زیر نوشت:

$$\bar{\Box}_4 \breve{g}_{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \breve{A}_n \tag{۲۲}$$

که در آن چندجمله‌ای‌های آدومیان $\breve{A}_n$ به صورت

$$\breve{A}_0 = \overline{\mathrm{M}}^2\, \breve{g}_0 + 6\, \breve{g}_0^3, \qquad \breve{A}_1 = \overline{\mathrm{M}}^2\, \breve{g}_0 + 18\, \breve{g}_0^2\, \breve{g}_1, \dots \tag{۲۲الف}$$

و جواب اولیه به شکل زیر است:

$$\overline{\Box}_4 \breve{g}_0 = 0 \Rightarrow\ \breve{g}_0(u,r) =\ \frac{c_0}{(u+a_0)^2 + r^2} \tag{۲۳}$$

که در آن c_0 ثابتی دلخواه است. به علاوه، رفتار نزدیک مرز جواب اخیر یا داده اولیه آدومیان، برای استفاده در (۲۲)، بنابر (۱۷) به صورت زیر است:

$$\breve{g}_0(u \to 0, r) \equiv \breve{g}_0(0,r) = \frac{c_0}{a_0^2 + r^2}\left(1 - \frac{2\, a_0}{a_0^2 + r^2}\, u\right). \tag{۲۳الف}$$

به این ترتیب می توان برای مدهای بی جرم و جرم دار مورد نظر با سه فرآیند آدومیان فوق الاشاره، معادله (۱۳) یا (۴) را حل و جواب هایی تقریبی به دست آورد.

جواب‌های معادله (شبه)اسکالر بی جرم و جرم دار با روش آدومیان

علاوه بر مورد با پس کنش که مد بی جرم ظاهر می شود، می توان در حد کاوشی (با صرفنظر کردن از پس کنش)، چنین حالت $m^2 = 0$ را در نسخه SW (۴) با $C_1 = 1/3$ محقق کرد. به همین ترتیب، مد جرم دار $m^2 = 40$ در حد کاوشی و در نسخه WR (۴) با $C_1 = 13$ محقق می شود. در این صورت با استفاده از شکل (۱۸) معادله، شرایط اولیه از (۱۶) و (۱۷) برای $\Delta_+ = 3,8$ و در نتیجه استفاده از داده اولیه $f_0 = (1 - \Delta_+)\, f(r)\, u^{\Delta_+}$، جواب معادله (۱۳) برای f تا مرتبه سوم در بسط سری اختلالی برای مد جرم دار و بی جرم به ترتیب به صورت زیر به دست می آید:

$$f^{(3)}(u,r) = -6\, f(r)\, u^3 + \frac{1}{4}\overline{\nabla}^2 f(r)\, u^5 + O(u^7), \tag{۲۴}$$

$$f^{(3)}(u,r) = -21\, f(r)\, u^8 + \frac{28}{135}\overline{\nabla}^2 f(r)\, u^{10} + O(u^{12}) \tag{۲۵}$$

که در آن $\overline{\nabla}^2 \equiv d^2/dr^2 + 2/(r\, dr)$. همچنین، با استفاده از داده اولیه $g_0 = (2 - \Delta_+)\, f(r)\, u^{\Delta_+ - 1}$، به ترتیب جواب های زیر را تا مرتبه سوم در بسط سری اختلالی را نزدیک مرز ($u = 0$) به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} f^{(3)}(u,r) = &-f(r)[1 - 2\ln(u) + 4\ln(u)^2 - 8\ln(u)^3]\, u^3 \\ &+ \frac{1}{12}\overline{\nabla}^2 f(r)[1 - 2\ln(u) + 4\ln(u)^2]\, u^5 + O(u^7), \end{aligned} \tag{۲۶}$$

[DOI: 10.61882/jmrph.7.2.21]

$$f^{(3)}(u,r) = -6f(r)[1 - 42\ln(u) + 176\ln(u)^2 + 74088\ln(u)^3]\,u^8 + O(u^{10}). \qquad (۲۷)$$

با این توجه که می توان جملات شامل $\ln(u)$ که در مرز بی نهایت می شوند را کنار گذاشت و تنها بخش متناهی جواب را در نظر گرفت.

از طرفی دیگر، می توان (۱۳) را به صورت (۲۱) نوشت؛ و آنگاه از جواب اولیه (۲۰) یا رفتار نزدیک مرز آن (۲۰الف) بنابر (۱۷)، جوابی به صورت زیر به دست می آید:

$$f^{(1)}(u,r) = \sum_{\Delta_+=1} \mathcal{F}_{\Delta_+}(r, a_0, b_0, m)\left(\frac{u}{a_0^2 - b_0^2 + r^2}\right)^{\Delta_+}; \qquad (۲۸)$$

که البته با این شرایط، برای مدهای جرم دار تنها جملات تا u^6در بسط اخیر وجود دارند و برای مد بی جرم نیز تابع $\mathcal{F}_3$شامل توان های $\ln(u)$ نیز می شود. اما اگر جواب (۲۰) را به عنوان داده اولیه در (۲۱) مورد استفاده قرار دهیم، جواب (۲۸) برای مد جرم دار $m^2 = 40$ با $\Delta_+ = 8$ نیز معتبر است؛ و به ویژه برای مد بی جرم، جواب مربوطه با $\Delta_+ = 3$ و $\mathcal{F}_3 = 2\sqrt{3}\,b_0(3a_0^2 + b_0^2 - r^2)$ است که با $3a_0^2 = r^2$ $3b_0^2 \equiv 4\bar{b}_0^2$ به صورت زیر در می آید:

$$f^{(1)}(u,r) = \frac{9}{4}\left(\frac{\bar{b}_0\,u}{r^2 - \bar{b}_0^2}\right)^3. \qquad (۲۹)$$

به همین ترتیب، با استفاده از معادله تکرار (۲۲) و داده اولیه آدومیان به صورت (۲۳) یا (۲۳الف)، شکل کلی جواب سری نزدیک مرز، دوباره مشابه (۲۸) البته با جایگزینی $b_0 \to c_0$ و بدون جمله $-b_0^2$ در مخرج خواهد بود. در واقع با داده اولیه آدومیان (۲۳الف)، تابع $\mathcal{F}_3$ حاصل برای مد بی جرم مجددا شامل توان های $\ln(u)$ نیز می شود؛ در حالیکه با در نظر گرفتن جواب اولیه (۲۳) به عنوان داده اولیه آدومیان، $\mathcal{F}_3 = 3c_0(3a_0^2 + c_0^2 - r^2)$ است که با $3a_0^2 = r^2$، $3c_0 \equiv 4\bar{c}_0$، جواب تا مرتبه اول فرآیند تکرار به صورت زیر نوشته می شود:

$$f^{(1)}(u,r) = 3\left(\frac{\bar{c}_0\,u}{r^2}\right)^3. \qquad (۳۰)$$

برای مد جرم دار نیز با داده اولیه آدومیان به صورت (۲۳الف)، جواب مربوطه به صورت زیر است:

$$f^{(1)}(u,r) = \mathcal{F}_8\left(\frac{u}{a_0^2 + r^2}\right)^8,$$
$$\mathcal{F}_8 = -\frac{12}{35}a_0^2\,c_0^2\,(26\,a_0^2 + 63\,c_0^2 - 42\,r^2); \qquad (۳۱)$$

که با $c_0 = 1/a_0^{\mathrm{n}_0}$ و $a_0 = -\sqrt{273}\,r/13$جواب زیر از آن حاصل می شود:

$$f^{(1)}(u,r) = d_0\frac{u^8}{r^{13+5\mathrm{n}_0}}; \qquad (۳۲)$$

که در آن $d_0 \cong 0.02$.

[DOI: 10.61882/jmph.7.2.21]

جواب ها و تقارن های دوگان حجمی- مرزی در قالب تناظر $\mathbf{AdS_4/CFT_3}$

نظریه پایه ای که در نظر گرفته ایم (مدل ABJM [۶]) در اصل دارای هندسه $AdS_4 \times S^7/Z_k$ ($\rightarrow CP^3 \ltimes S^1/Z_k$) با تقارن همدیس (گروه ایزومتری) $SO(3,2)$ در فضای مینکوفسکی و تقارن داخلی $SO(8)$ ($\rightarrow SU(4) \times U(1)$) و ابرتقارن $\mathcal{N} = 8 \rightarrow 6$ است. ۴- فرم قدرت میدانی که به صورت جواب آزمایشی (۱) روی زمینه ساخته ایم، در واقع منتسب به (پاد)غشاءهای ام (در حالتی که زمینه WR است، پادغشاءها و در حالتی که زمینه SW است، غشاءها) است که حول جهت های فضایی مختلف می پیچند و در هر صورت نظریه حاصل از آن برای پادغشاءهای M2 است. چنین (پاد) غشاءهای ام کاوشی، به سبب اینکه حول جهت های ترکیبی فضای داخلی و خارجی می پیچند، طبق قواعد تقاطع غشاءها [۸] تمام ابرتقارن ها و پاریته را نیز می شکنند- در واقع طبق [۱۶] هنگامی که تمام مولفه های ۴- فرم در فضای داخلی باشند، چنین شکست ابرتقارن و در نتیجه ناپایداری جواب ها را طبق [۱۷] داریم. به همین ترتیب، با (شبه) اسکالرهای تکتایه حاصل و معادلات در فضای $\mathrm{E}AdS_4$ که هیچ عنصر فضای داخلی را صریحا شامل نمی شود، در واقع یک برش سازگار داریم؛ [۱۸] و مراجع آن را ببینید. اما از آنجایی که جواب آزمایشی ما تقارن انعکاسی $\boldsymbol{I}: x^\mu \rightarrow x^\mu/(u^2 + r^2)$ و در نتیجه تقارن همدیس خاص $K_\mu = \boldsymbol{I} P_\mu \boldsymbol{I}$ را می شکند و به علت وجود جواب های غیرثابت، ناوردایی انتقالی P_μ شکسته می شود و همچنین به علت وجود جملات جرمی و برهمکنش ها، ناوردایی مقیاس نیز شکسته می شود، در نتیجه گروه تقارن همدیس $SO(4,1)$ در فضای اقلیدسی، به $SO(4)$ می شکند که شش مولد آن شامل سه تبدیل لورنتز $L_{\mu\nu}$ و $R_\mu \approx (K_\mu + a_0^2\, P_\mu)$ متناظر با چرخش‌های روی یک ۳-کره و a_0 یا a به عنوان پارامتر مقیاس است؛ برای جزئیات بیشتر، [۱۹] و [۲۰] را نیز ببینید. در واقع جواب های حجمی ما حداقل چنین تقارن $SO(4)$ را حفظ می کنند که با تفسیر آنها به عنوان جواب های حباب، چهار پارامتر مربوط به شکستن تقارن مقیاس و تقارن انتقالی (یعنی a_0 و $\vec{u}_0 \equiv (b_1, b_2, b_3)$) مسئول انتقال حباب به اطراف در حجم و اندازه اینستنتون هستند.

از طرفی دیگر، برای تحقق (شبه)اسکالرهای حاصل در طیف ابرگرانش ۱۱ بعدی روی زمینه هندسی $AdS_4 \times S^7/Z_k$ (به [۲۱] و مراجع در آن و نیز [۲۲] برای تحلیلی جدیدتر از چنین طیفی مراجعه کنید)، ابتداء توجه می کنیم که سه نسل از اسکالرها ($0_1^+, 0_2^+, 0_3^+$) و دو نسل از شبه اسکالر ها ($0_1^-, 0_2^-$) وجود دارند. در واقع چند تایه مبنا یا به اصطلاح بی جرم آن شامل یک گراویتون ($\mathbf{1}$)، یک گراویتینو ($\mathbf{8}_s$)، ۲۸ میدان اسپین یک ($\mathbf{28}$)، ۵۶ میدان اسپین نیم ($\mathbf{56}_s$)، ۳۵ اسکالر 0_1^+ ($\mathbf{35}_v$) و ۳۵ شبه اسکالر 0_1^- ($\mathbf{35}_c$) است که دو مورد آخر به ترتیب از مولفه های خارجی و داخلی ۴- فرم ناشی می شوند؛ و تحت تجزیه $G \rightarrow H$، هیچ تکتایه ای ($\mathbf{1_0}$) برای اسکالرها ($35_v \rightarrow 10_{-2} \oplus 10_2 \oplus 15_0$) و شبه اسکالرها ($35_c \rightarrow 10_{-2} \oplus 10_2 \oplus 15_0$) وجود ندارد. در چندتایه های کالوزا-کلاین بالاتر نیز اسکالر بی جرم $m^2 = 0$ در نمایش 1386_v از 0_1^- و شبه اسکالر بی جرم نیز در نمایش 840_s از 0_1^+ قرار می گیرند که تحت تجزیه $G \rightarrow H$ هیچ تکتایه ای را شامل نمی شوند. به همین ترتیب، شبه اسکالر جرم دار

[DOI: 10.61882/jmrph.7.2.21]

$m^2 = 40$ در نمایش 440895_{vc} از 0_1^-و نمایش 24024_{vs} از 0_2^- قرار می گیرد؛ و همین مد جرم دار به عنوان اسکالر نیز در نمایش‌های 128877_v از 0_1^+ ، 294_v از 0_2^+و 241332_v از 0_3^+ می نشیند که دوباره هیچ تکتایه ای را تحت تجزیه $G \to H$ شامل نمی شود.

اما با توجه به اینکه سه نمایش بنیادی غیرمعادل 8_s ، 8_c و 8_v از G برای گراویتینو وجود دارد، به منظور تحقق مدهای تکتایه مطلوب و همچنین شکست ابرتقارن، از تبادل این سه نمایش استفاده می کنیم. در این راه، با تبادل نمایش های $s \leftrightarrow c$ و v بدون تغییر (که به معنای مبادله اسپینورها یا ابربارها با فرمیون ها و بدون تغییر نگه داشتن اسکالرها است)، نمایش های مربوطه برای اسکالرها و شبه اسکالرها بی جرم و جرم دار متناظرا تغییر می کنند، اما در نهایت هیچ تکتایه ای تحت تجزیه نمایش ها وجود ندارد. از طرفی دیگر، با تبادل نمایش های $s \leftrightarrow v$ و cبدون تغییر (که به معنای مبادله اسپینورها یا ابربارها با اسکالرها و بدون تغییر نگه داشتن فرمیون ها است)، نمایش های حاصل برای هر دو مد حجمی به عنوان شبه اسکالر، دوباره هیچ تکتایه ای را شامل نمی شوند؛ اما نمایش 1386_s را برای اسکالر بی جرم و نمایش های 128877_s، 294_s و 241332_s را برای اسکالر جرم دار تحت تبادل اخیر نمایش ها داریم که هر چهار تای آنها، تحت تجزیه $G \to H$ یک مد تکتایه را شامل می شوند، در واقع با سه جمله مشترک در طرف راست نمایش

$$294_s \to 1_0 \oplus 2\acute{0}_0 \oplus 105_0 \oplus \dots \qquad (۳۳)$$

که 1_0 آن را می توان مد تکتایه حجمی (همان f) در نظر گرفت که در بخش بعدی دوگان های آن را ارائه می نماییم.

از طرفی دیگر، چنین تقارن های حجمی را می توان در بخش تکتایه نظریه های میدان $O(N)$ یا $U(N)$ چرن-سایمون-ماده مرزی محقق نمود. در این راستا، توجه می کنیم که هشت اسکالر $X^I \to (Y^A, Y_A^\dagger)$ و هشت فرمیون $\Psi^I \to (\psi_A, \psi^{A\dagger})$ مدل ABJM با $I, J \dots = (1, \dots 6,7,8) = (m, 7,8)$ (مرکب از چهار اسکالر و چهار فرمیون مختلط با $A = 1,2,3,4$)، در نمایش های $8_v \to 4_{+1} \oplus \bar{4}_{-1}$ و $8_c \to 4_{-1} \oplus \bar{4}_{+1}$ قرار دارند؛ و لذا به منظور تحقق مدل تکتایه مرزی و شکست کامل ابرتقارن، می توان با تبادل نمایش های $8_s \leftrightarrow 8_c$ و $8_s \leftrightarrow 8_v$، با توجه به $8_s \to 6_0 \oplus 1_2 \oplus 1_{-2}$، به ترتیب فرمیون و (شبه)اسکالر تکتایه مطلوب را از تجزیه $\Psi^I \to (\Phi^m, \Phi, \bar{\Phi})$ یا X^I با Φبرای هر دو ψ و Y، $\Phi = \Phi^7 + i\,\Phi^8$ و $\Phi^\dagger = \bar{\Phi}$ محقق نمود. به منظور تحقق شکست پاریته نیز توجه می کنیم که اضافه کردن ℓ (پاد)غشای ام به زمینه (WR) SW از N غشای M2، گروه تقارن پیمانه ای را به $SU(N+\ell)_k \times SU(N)_{-k}$ تغییر می دهد؛ که در نتیجه می توانیم همچنان گروه پیمانه ای اصلی را به عنوان ناظر در نظر گرفته و تنها به بخش $U(1) \subset U(\ell)$ آن متمرکز شویم- البته چنین رویه ای از دیدگاه (پاد)غشاءهای ام کسری[۱۸] به عنوان (پاد)غشاءهای-M5 که حول $R^3 \times S^3/Z_k$ می‌پیچند [۲۳ و ۲۴] و نیز از منظر یک سازوکار هیگز جدید [۲۵] تبیین شده است.

از طرفی دیگر، یک (شبه)اسکالر حجمی با رفتار نزدیک مرز به صورت

[18] Fractional M2-branes

[DOI: 10.61882/jmph.7.2.21]

$$f(u,\vec{u}) \approx \alpha(\vec{u})\, u^{\Delta_-} + \beta(\vec{u})\, u^{\Delta_+} \tag{۳۴}$$

را می توان با شرط مرزی نیومن ($\delta\beta = 0$) برای جرم های در بازه $-9/4 \le m^2 \le -5/4$ یا با شرط مرزی دیریکله یا استاندارد ($\delta\alpha = 0$) کوانتیده کرد که دومی برای جرم های بالای قید $m_{BF}^2 = -9/4$ (به منظور حقیقی بودن Δ_+) [۲۶] به کار می رود- به عنوان مطالعات اولیه در این زمینه، برای نمونه [۲۷] و [۲۸] را ببینید. در اینجا چون ما علاقمند به مدهای بی جرم و جرم دار هنجارش پذیر هستیم، لذا به طور طبیعی شرایط مرزی استاندارد را به کار می بریم و در این صورت، α و β تفسیرهای هولوگرافیک به ترتیب به عنوان چشمه و مقدار چشمداشتی خلاء عملگر Δ_+ ($\mathcal{O}_{\Delta_+}$) دارند و البته برای عملگر Δ_- ($\mathcal{O}_{\Delta_-}$) نقش آنها عوض می‌شود. به این ترتیب، قواعد تناظر AdS/CFT اقلیدسی مورد نیاز را به صورت زیر می نویسیم:

$$\langle \mathcal{O}_{\Delta_+} \rangle_\alpha = -\frac{\delta W[\alpha]}{\delta\alpha} = \beta, \qquad \langle \mathcal{O}_{\Delta_-} \rangle_\beta = -\frac{\delta \widetilde{W}[\beta]}{\delta\beta} = \alpha,$$
$$\widetilde{W}[\beta] = -W[\alpha] - \int d^3\vec{u}\ \alpha(\vec{u})\,\beta(\vec{u}) \tag{۳۵}$$

که در آن $W[\alpha]$ ($\widetilde{W}[\beta]$) تابعی مولد همبسته همبند[۱۹] عملگر $\mathcal{O}_{\Delta_+}$ ($\mathcal{O}_{\Delta_-}$) در CFT_3 مرزی (دوگان) با کوانتش Δ_+ (Δ_-) است.

جواب های دوگان در نظریه های میدان چرن- سایمون- ماده سه بعدی مرزی

بنابر ملاحضات تقارنی در بخش قبل و با توجه به اینکه ما در واقع از کنش مرزی مدل ABJM به صورت ارائه شده در [۲۹] و [۳۰] استفاده می کنیم، با در نظر گرفتن یک اسکالر $Y = \varphi = h(r)\, \mathrm{I}_N$ و یک فرمیون ψ تکتایه (بسته به مورد) و بخش $U(1)$ گروه تقارن پیمانه ای، کنش مرزی را به صورت زیر می نویسیم:

$$S^{(j)} = S_{CS}^{+} - \int d^3\vec{u}\ \left[tr\left(D_k Y^\dagger D^k Y\right) + tr\left(i\bar{\psi}\,\gamma^k D_k \psi\right) + \mathcal{W}_\Delta^{(j)}\right] \tag{۳۶}$$

که انتگرال $\mathcal{W}_\Delta^{(j)}$ همان W در (۳۵) است و معرف تغییرشکل هایی (برچسب زده شده با $j = a, b, \dots, g$) است که با عملگرهای H- تکتایه مختلف انجام می دهیم؛ کنش چرن- سایمون نیز انتگرال لاگرانژین زیر است:

$$\mathcal{L}_{CS}^{+} = \frac{ik}{4\pi}\varepsilon^{ijk}\, tr\left(A_i^+ \partial_j A_k^+ + \frac{2i}{3} A_i^+ A_j^+ A_k^+\right); \tag{۳۶الف}$$

و همچنین $D_k \Phi = \partial_k \Phi + iA_k\, \Phi - i\Phi\, \hat{A}_k$ و $F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i + i\left[A_i, A_j\right]$. به علاوه، لازم به یادآوری است که در واقع می توان قسمت $U(1) \times U(1)$ گروه پیمانه ای ضربی اصلی $\mathcal{G}$ را با میدان های پیمانه ای $A_i^{\pm} \equiv (A_i \pm \hat{A}_i)$ در نظر گرفت و با توجه به اینکه میدان های بنیادی در مدل ABJM نسبت به A_i^+ ($U(1)$ قطری) خنثی هستند و A_i^- به عنوان تقارن باریونی عمل می کند، لذا ما $A_i^- = 0$ قرار می دهیم؛ و البته جمع $\mathcal{L}_{CS}$ (برای A_i) و $\hat{\mathcal{L}}_{CS}$ (برای $\hat{A}_i$) را به جای $\mathcal{L}_{CS}^{+}$ (صرفا برای A_i^+) را نیز به کار خواهیم گرفت.

[19] Generating functional of connected correlator

[DOI: 10.61882/jmph.7.2.21]

همچنین لازم تاکید است که در اینجا با در نظر گرفتن مدهای هنجارش پذیر و شرط مرزی دیریکله، تغییرشکل در کنش (۳۶) را با توجه به (۳۵) به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$\mathcal{W}_{\Delta_+}^{(j)} = \alpha\, \mathcal{O}_{\Delta_+}^{(j)}. \tag{۳۷}$$

تغییرات حاشیه ای مرزی و جواب های دوگان برای مد بی جرم حجمی

با توجه به اینکه برای جواب حجمی با شامل کردن پس کنش روی فضای خارجی، مد بی جرم متناظر با تغییرشکل حاشیه ای دقیق را به دست آوردیم، لذا در اینجا علاوه بر عملگرهای حاشیه ای دقیق ($\Delta_+ = 3$) که پیشتر در [۳۰]، [۳۱]، [۳۲] و [۱-۵] در نظر گرفته ایم، عملگر جدید زیر را نیز شامل می کنیم:

$$\mathcal{O}_3^{(g)} = tr(\varphi\bar{\varphi})\, tr(\psi\bar{\psi})^{1/2}\, \varepsilon^{kij}\varepsilon_{ij}\, A_k^+. \tag{۳۸}$$

اکنون با تغییر کنش با عملگر فوق طبق (۳۷) و در حالت کلی استفاده از هر دو جمله $\mathrm{S}_{CS} + \hat{\mathrm{S}}_{CS}$ به جای S_{CS}^+ در کنش (۳۶) و توجه به اینکه $F_{ij}^- = 0$ و در نتیجه $A_i^- = 0$ و همچنین قرار دادن $\alpha = 1$ برای سادگی، معادلات حاصل برای اسکالر ($\bar{\varphi}$)، فرمیون ($\bar{\psi}$) و پیمانه (A_k^+) به ترتیب می شوند:

$$\partial_k\partial^k\varphi - \varphi\, tr(\psi\bar{\psi})^{1/2}\, \varepsilon^{kij}\varepsilon_{ij}\, A_k^+ = 0, \tag{۳۹}$$

$$i\,\gamma^k\partial_k\psi + \frac{\psi}{2}\, tr(\psi\bar{\psi})^{-1/2}\, tr(\varphi\bar{\varphi})\varepsilon^{kij}\varepsilon_{ij}\, A_k^+ = 0, \tag{۴۰}$$

$$\frac{ik}{4\pi}\varepsilon^{kij}F_{ij}^+ - tr(\varphi\bar{\varphi})\, tr(\psi\bar{\psi})^{\frac{1}{2}}\, \varepsilon^{kij}\varepsilon_{ij} + 2\,\bar{\psi}\,\gamma^k\,\psi + i\big[\varphi\big(\partial^k\bar{\varphi}\big) - \big(\partial^k\varphi\big)\bar{\varphi}\big] = 0, \tag{۴۱}$$

که در معادله آخر از اینکه $\varphi \neq \bar{\varphi} = \varphi^\dagger$ استفاده کرده ایم که در فضای اقلیدسی مجاز است؛ و $\gamma^k = (\sigma_2, \sigma_1, \sigma_3)$ ماتریس‌های گامای اقلیدسی هستند.

اکنون برای حالت خاص با تنها یک جمله چرن- سایمون S_{CS}^+ و $\varphi = \bar{\varphi}$، از جمله سوم به بعد در طرف چپ معادله (۴۱) حذف می شوند و لذا می توان نشان داد که از ترکیب معادلات منتجه، بخش اسکالر به صورت زیر اقناع می شود:

$$\partial_k\partial^k h(r) = 0 \Rightarrow h(r) = a_1 + \frac{a_2}{r} \tag{۴۲}$$

که $a_0, a_1, a_2, \ldots$ ثابت‌های مرزی هستند و یادآوری می کنیم $r = |\vec{u} - \vec{u}_0| = |x - x_0|$ با $\vec{u}_0$ یا x_0 به عنوان یک مبداء دلخواه؛ و برای قسمت فرمیونی و پیمانه ای نیز معادلات حاصل عبارتند از:

$$i\gamma^k\partial_k\psi = 0, \qquad \varepsilon^{kij}\, A_k^+\, F_{ij}^+ = 0 \tag{۴۳}$$

که برای معادله فرمیونی جواب

$$\psi = a_3\,\frac{a + i(\vec{u} - \vec{u}_0).\vec{\gamma}}{[a^2 + (\vec{u} - \vec{u}_0)^2]^{\varsigma=3/2}}\binom{1}{0} \tag{۴۴}$$

[DOI: 10.61882/jmph.7.2.21]

با $\varsigma = \frac{3}{2}$ ، $a = 0$ و $a_3 = \frac{i}{2}\sqrt[3]{\frac{4}{5}}$ و برای معادله پیمانه ای، جواب زیر را در نظر می گیریم:

$$A_k^+ = \varepsilon_{kij}\, \varepsilon^{ij} A^+(r), \qquad A^+(r) = \frac{a_4}{r^2} \tag{۴۵}$$

که $A^+(r)$ یک تابع اسکالر روی مرز است. در نتیجه، تناظر مرزی- حجمی

$$\langle \mathcal{O}_{\Delta_+}^{(j)} \rangle_\alpha \sim \frac{1}{r^{2\Delta_+}}, \tag{۴۶}$$

در این مورد ($\Delta_+ = 3$) با $j = g$ (۳۸)، همراه با جواب های (۴۲) با $a_1 = 0$، (۴۴) و (۴۵) در طرف مرزی و جواب های حجمی (۲۴) و (۲۶) در مرتبه اول، یا جواب (۱۰) در حد نزدیک مرز $u = 0$ و به ویژه با جواب (۳۰) همراه با تطبیق پارامترهای مرزی و حجمی، تصدیق می شود.

اما برای حل همزمان معادلات (۳۹)، (۴۰) و (۴۱) در حالت کلی، با در نظر گرفتن

$$\varphi = h(r)\, I_N, \qquad \varphi^\dagger = a_5\, I_N, \tag{۴۷}$$

می توان نشان داد که اکنون علاوه بر معادله میدان پیمانه ای در (۴۳)، دو معادله زیر نیز باید اقناع شوند:

$$i\, \bar{\psi}\, \gamma^k \partial_k \psi + 2\, \bar{\psi}\, \gamma^k\, \psi\, A_k^+ = 0, \tag{۴۸}$$

$$\partial_k \partial^k \varphi + 2i\, \partial^k \varphi\, A_k^+ = 0. \tag{۴۹}$$

سپس، معادله (۴۸) با جواب (۴۴) و جواب آزمایشی پیمانه ای در (۴۵) با استفاده از مولفه سوم ماتریس گاما، همراه با جواب پیمانه ای زیر حل می شود:

$$A^+ = \frac{3}{4} \frac{a}{a^2 + (\vec{u} - \vec{u}_0)^2}. \tag{۵۰}$$

با استفاده از این جواب، از معادله (۴۹) نیز می توان به دست آورد:

$$h = \frac{3}{4}\left(\frac{a_6}{a^2 + (\vec{u} - \vec{u}_0)^2}\right) \tag{۵۱}$$

که صرفا در حد $a \to 0$ جوابی معتبر است. در نتیجه، با استفاده از جواب های (۴۴)، (۵۰)، (۵۱) و عملگر (۳۸) داریم:

$$\langle \mathcal{O}_3^{(g)} \rangle_\alpha = \frac{9}{16} \frac{a\, a_3 a_5 a_6}{[a^2 + (\vec{u} - \vec{u}_0)^2]^3}, \tag{۵۲}$$

که می توان آن را با جواب حجمی (۲۹) تطبیق داد؛ و یا آن را با جواب (۱۰) برای $\Delta_+ = 3$ متناظر کرد که در این صورت جواب مرزی را می توان به صورت یک اینستنتون در نقطه همدیس $u = a$ در نظر گرفت.

به همین ترتیب می توان مقدار تصحیح کنش مربوطه برپایه جواب های فوق را محاسبه کرد که نتیجه آن می شود:

$$S_3^{(g)} = -\frac{1}{2}\int \mathcal{O}_3^{(g)}\, d^3\vec{u} = -\frac{9\pi}{2}\int_0^\infty \frac{a\, a_3 a_5 a_6\, r^2}{(a^2 + r^2)^3}\, dr \Rightarrow \tilde{S}_{modi.}^{(g)} = -\frac{9}{32}\pi^2 a \tag{۵۳}$$

[DOI: 10.61882/jmrph.7.2.21]

(در مرحله آخر، برای سادگی، تمام پارامترهای ثابت را برابر قرار دادیم) و این مقداری متناهی است که معرف اینستنتونی با اندازه $a \geq 0$ (در حد $a \to 0$، اینستنتونی کوچک) در مرکز ($\vec{u}_0 = 0$) یک ۳-کره با شعاع r در بینهایت (S^3_∞) است.

تغییرات نامربوط مرزی و جواب های دوگان برای مد جرم دار حجمی

برای مد هیگزگونه حجمی $m^2 = 18$، تغییرشکل های به اصطلاح نامربوطی متناظر با شرط مرزی دیریکله را طبق (۳۷) از کنش (۳۶)، با چند عملگر $\Delta_+ = 8$ که در اینجا معرفی می کنیم، انجام می دهیم. اولین عملگر و تغییرشکل (جرمی) را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$\mathcal{O}_8^{(a)} = tr(\psi\bar{\psi})^4, \qquad \mathcal{W}_8^{(a)} = m_f\, \mathcal{O}_2^{(a)} + \tilde{g}_8 \alpha\, \mathcal{O}_8^{(a)} \tag{۵۴}$$

که $\mathcal{O}_2^{(a)} = tr(\psi\bar{\psi})$ عملگر دوگان به (شبه)اسکالر جفت شده همدیس حجمی تحت شرط مرزی دیریکله است که قبلا در [۱۵] و [۲۰] مطالعه شده و $\tilde{g}_8$ یک ثابت جفت شدگی مرزی است. در واقع این عملگر $\mathcal{O}_8^{(a)}$ را می توان به عنوان تغییر دو-ردی[۲۰] از عملگر $\mathcal{O}_4^{(a)}$ مدل فرمیونی بحرانی در [۲] در نظر گرفت. اکنون با کنارگذاشتن بخش اسکالر در کنش (۳۶)، معادله حرکت $\bar{\psi}$ می شود:

$$i\,\gamma^k \partial_k \psi + m_f\, \psi + 4\, \tilde{g}_8\, \alpha\, \psi\, tr(\psi\bar{\psi})^3 = 0. \tag{۵۵}$$

جواب (۴۴) برای حالت بی جرم ($m_f = 0$) معادله اخیر با $a_3 = 3\, a/(4\, \tilde{g}_8)$ و شرط

$$\alpha = tr(\psi\bar{\psi})^{-5/2} \tag{۵۶}$$

معتبر است و برای مورد جرم دار، بعلاوه با $m_f \to \tilde{\alpha}(\vec{u}) = tr(\psi\bar{\psi})^{1/2}$ معتبر است؛ و البته اگر $\tilde{g}_8 = 1$، $a_3 = 3\, a/5$ و اگر $a_3 = a$، $\tilde{g}_8 = 1/2$. در نتیجه برای تصدیق تناظر حجمی- مرزی خواهیم داشت:

$$\langle \mathcal{O}_8^{(a)} \rangle_\alpha = \left(\frac{a_3}{a^2 + (\vec{u} - \vec{u}_0)^2} \right)^8 \tag{۵۷}$$

که با توجه به (۳۴) و (۳۵) می توان آن را با جواب حجمی با ساختار (۲۸) برای $\Delta_+ = 8$ تطبیق داد؛ و همچنین می توان از این تناظر شکل صریحی برای تابع $f(r)$ در (۱۴) به صورت زیر به دست آورد (با $C_3 = 1$):

$$f(r)^2 = \frac{a_3}{a^2 + r^2}. \tag{۵۸}$$

به همین ترتیب، عملگرهای ترکیبی زیر را نیز می توان در نظر گرفت:

[20] Double-trace deformation

[DOI: 10.61882/jmph.7.2.21]

$$\mathcal{O}_8^{(b)}= tr(\varphi\bar{\varphi})^4\, tr(\psi\bar{\psi})^2,\qquad \mathcal{O}_8^{(c)}= tr(\psi\bar{\psi})\, tr(\varphi\bar{\varphi})^6,$$ (۵۹)
$$\mathcal{O}_8^{(d)}= tr(\varphi\bar{\varphi})^3\, tr(\psi\bar{\psi})^2\varepsilon^{ijk}\,\varepsilon_{ij}\,A_k^+,\ \mathcal{O}_8^{(e)}= tr(\psi\bar{\psi})\, tr(\varphi\bar{\varphi})^3\varepsilon^{ijk}\,F_{ij}^+\,A_k^+;$$

و سپس کنش (۳۶) را با توجه به (۳۷) با آنها تغییر داد. آنگاه می توان جواب فرمیونی را (۴۴) با $a=0$، جواب اسکالر را (۴۲) و برای $\mathcal{O}_8^{(d)}$ جواب پیمانه ای را به صورت (۴۵) و برای $\mathcal{O}_8^{(e)}$ جواب آزمایشی زیر را برای حل $\varepsilon^{kij}\,F_{ij}^+=0$ نوشت:

$$A_\mu^+=\omega_{\mu\nu}\,x^\nu A(r),\qquad \omega_{\mu\nu}=\begin{cases}1 & :\ \nu>\mu,\\ 0 & :\ \nu=\mu,\quad \mu,\nu\neq i,j\end{cases}$$ (۶۰)

که μ,ν نیز اندیس های مرزی و $A(r)$ تابع اسکالر مرزی دیگر است؛ و در نتیجه جواب زیر را می توان به دست آورد:

$$A(r)=\frac{a_7+4\,a_8\,r}{4\,r^4}\Rightarrow \varepsilon^{ij}F_{ij}^+\equiv F^+=\frac{a_7}{r^4}.$$ (۶۱)

در نتیجه برای هر چهار عملگر در (۵۹)، تناظری به صورت (۴۶) با $\Delta_+=8$، یعنی $\langle\mathcal{O}_8^{(b,c,d,e)}\rangle_\alpha\sim 1/r^{16}$ را داریم که می توان آن را به راحتی با جواب های حجمی مربوطه (۱۶)، (۲۵) و (۳۲) برای تطبیق پارامترها و نیز با (۱۴) برای معین کردن شکل تابع $f(r)$ متناظر کرد.

عملگر جالب توجه دیگر عبارت است از:

$$\mathcal{O}_8^{(f)}= tr(\varphi\bar{\varphi})^6\,\varepsilon^{ij}\,F_{ij}^+;$$ (۶۲)

که با کنار گذاشتن بخش فرمیونی کنش (۳۶) و انجام تغییرشکل مطابق (۳۷)، در حالت کلی معادلات حرکت برای $\bar{\varphi}$ و A_i^+ به صورت زیر است:

$$\partial_k\partial^k\varphi-6\,\alpha\,\varphi\, tr(\varphi\bar{\varphi})^5\,\varepsilon^{ij}\,F_{ij}^+=0,$$ (۶۳)
$$\frac{ik}{4\pi}\varepsilon^{kij}F_{ij}^+ + i\big[\varphi\big(\partial^k\bar{\varphi}\big)-\big(\partial^k\varphi\big)\bar{\varphi}\big]=0.$$ (۶۴)

در مورد با $\varphi=\bar{\varphi}=h(r)\,I_N$، می توان جواب بخش پیمانه ای را به صورت

$$F^+\equiv\varepsilon^{ij}\,F_{ij}^+=\left(\frac{a}{a^2+(\vec{u}-\vec{u}_0)^2}\right)^2$$ (۶۵)

نوشت که با a متناهی غیرصفر، شرط $F^+(r\to\infty)\to 0$ را برآورده می کند؛ و سپس با در نظر گرفتن $F^+=-h^4$ و $\alpha=tr(\varphi\bar{\varphi})^{-5}$، معادله (۶۳) می شود:

$$\partial_k\partial^k h+6\,h^5=0\Rightarrow h=\left(\frac{1}{2}\right)^{1/4}\left(\frac{a}{a^2+(\vec{u}-\vec{u}_0)^2}\right)^{1/2};$$ (۶۶)

و در نتیجه

$$\langle\mathcal{O}_8^{(f)}\rangle_\alpha=a_9\left(\frac{a}{a^2+(\vec{u}-\vec{u}_0)^2}\right)^8,$$ (۶۷)

با $a_9=1/8$ که در حد $a\to 0$ و $r\to\infty$ با جواب های حجمی نزدیک مرز (۲۵)، (۲۷) و (۳۲) از نظر ساختاری منطبق می شود. همچنین می توان این جواب مرزی را به عنوان اینستنتونی که در نقطه همدیس $u=a$ نشسته

[DOI: 10.61882/jmrph.7.2.21]

است در نظر گرفت که در این صورت با جواب حجمی (۱۰) با $\Delta_+ = 8$ منطبق می شود. مقدار (متناهی) کنش برپایه جواب های اخیر نیز به صورت زیر است:

$$S_8^{(f)} = 5\int \mathcal{W}_8^{(f)}\, d^3\vec{u} = \frac{20\pi}{\sqrt{2}}\int_0^\infty \frac{a^3\, r^2}{(a^2+r^2)^4}\, dr \Rightarrow \tilde{S}^{(f)}_{modi.} = \frac{5\pi^2}{4\sqrt{2}}. \qquad (۶۸)$$

اما در حالتی که $\varphi \neq \bar{\varphi}$، با استفاده از (۴۷) و بازنویسی (۶۴) و قراردادن نتیجه حاصل در (۶۳)، داریم:

$$\partial_k\left(\varepsilon^{kij}F^+_{ij}\right) - \frac{24\pi a_5}{k}\ \alpha\ \varphi\ tr(\varphi\bar{\varphi})^5\ \varepsilon^{ij}F^+_{ij} = 0. \qquad (۶۹)$$

سپس با در نظر گرفتن جواب آزمایشی [۳۳]

$$A_i^+ = \varepsilon_{ij}\ x^j A(r) \qquad (۷۰)$$

و ساده سازی $x = y = z = r/\sqrt{3}$، در نتیجه $F^+ = -4A(r)$ و با استفاده از $\alpha = tr(\varphi\bar{\varphi})^{-5}$، در نهایت داریم:

$$\frac{dA(r)}{dr} + h(r)A(r) = 0, \quad a_5 \equiv -\frac{\sqrt{3}\,k}{8\pi} \qquad (۷۱)$$

که می توان جواب زیر را برای آن نوشت:

$$h(r) = \frac{n}{r} \Longrightarrow A(r) = \frac{a_0}{r^n} \qquad (۷۲)$$

که در آن n یک عدد حقیقی است. در نتیجه برای مقدار چشمداشتی عملگر مربوطه داریم:

$$\langle \mathcal{O}_8^{(f)}\rangle_\alpha = \frac{4\, n^6\, a_5^6\, a_0}{r^{6+n}} \qquad (۷۳)$$

که با $n = 10$، تناظر معمول (۴۶) و با $n = 2$، تناظر با جواب حجمی (۱۵) با $C_5 = 0$ و $C_4 \sim a_5^6\ a_0$ را داریم.

به همین ترتیب، عملگر زیر را نیز در نظر می گیریم:

$$\mathcal{O}_8^{(g)} = tr(\psi\bar{\psi})^2\ tr\left(F^+_{ij}\ F^{+\,ij}\right); \qquad (۷۴)$$

و با کنارگذاشتن بخش اسکالر کنش (۳۶)، آن را با عملگر فوق باتوجه به (۳۷) تغییرشکل می دهیم. اکنون با در نظر گرفتن هر دو جمله چرن- سایمون ($\mathrm{S}_{CS} + \hat{\mathrm{S}}_{CS}$ به جای S^+_{CS} در (۳۶الف))، معادلات حرکت برای $\bar{\psi}$ و A_i^+ به ترتیب عبارتند از:

$$i\,\gamma^k\partial_k\psi + 2\alpha\ \psi\ tr(\psi\bar{\psi})\ tr(F^+_{ij}\ F^{+\,ij}) = 0, \qquad (۷۵)$$

$$\frac{ik}{4\pi}\varepsilon^{kij}F^+_{ij} + 2\ \bar{\psi}\ \gamma^k\ \psi + 4\ \alpha\ tr(\psi\bar{\psi})^2\ \partial_j F^{+\,jk} = 0. \qquad (۷۶)$$

سپس، با استفاده از (۵۶)، جواب (۶۵) برای میدان پیمانه ای، جواب (۴۴) با $a_3 = \frac{16ik}{9\pi}\,a$ نیز برای میدان فرمیونی (با درنظرگرفتن مولفه سوم ماتریس گاما $\gamma^k \to \gamma^3$ برای سازگاری محاسبات) برقرار است؛ و در این صورت تناظر (۶۷) با $a_9 = 2a^{-4}\ a_3^4$ معتبر است. همچنین، اگر $\alpha = 1$، آنگاه اگر در صورت جواب آزمایشی (۶۵) برای این مورد خاص به جای a^2، a_3 قرار دهیم، آنگاه با $a_3 = \left(\frac{-9ik}{16\pi}\,a\right)^{1/5}$ و $\varsigma = \frac{1}{2}$ به جای $\varsigma = \frac{3}{2}$ در (۴۴)، تناظر زیر را داریم:

$$\langle \mathcal{O}_8^{(g)} \rangle_\alpha = 2\left(\frac{a_3}{a^2 + (\vec{u} - \vec{u}_0)^2}\right)^4; \tag{۷۷}$$

که در حد $a \to 0$ و $r \to \infty$ با جواب حجمی نزدیک مرز (۱۵) با $C_5 = 0$ و $C_4 = 2a_3^4$متناظر می شود و یا می توان با آن، تابع $f(r)$ در جواب حجمی (۲۵) را تثبیت کرد. در نهایت مقدار تصیحیح کنش مربوطه برپایه این جواب ها به صورت زیر به دست می آید:

$$S_8^{(g)} = \int \mathcal{W}_8^{(g)}\, d^3\vec{u} = 8\pi \int_0^\infty \frac{a_3^4\, r^2}{(a^2 + r^2)^4}\, dr \Rightarrow \tilde{S}_{modi.}^{(g)} = \frac{\pi^2 a_3^4}{8a^2}; \tag{۷۸}$$

که در واقع نشان دهنده اینستنتونی با اندازه (کوچک) a روی یک ۳-کره با شعاع r در بینهایت است.

خلاصه و نکات پایانی

در این نوشته یک برش کالوزا-کلاین سازگار از ابرگرانش ۱۱ بعدی روی $AdS_4 \times CP^3 \ltimes S^1/Z_k$ را ارائه نمودیم. پتاسیل اسکالر در کنش تقلیل یافته در فضای AdS_4 اقلیدسی از نوع به اصطلاح ϕ^4 و هیگزگونه است. با حل معادله اصلی حجمی همراه با معادلات حاصل از صفر قراردادن تانسورهای انرژی- تکانه- تنش در معادلات اینشتین-که به این معناست که جواب های اینستنتونی به عنوان موجودات توپولوژیک پس کنشی روی هندسه زمینه ندارند- دیدیم که معادله خطی از نوع کلاین-گوردون، برای (شبه)اسکالرهای بی جرم و جرم دار در $\mathrm{E}AdS_4$، بسته به در نظرگرفتن پس کنش به ترتیب روی فضای خارجی و داخلی، است و یک جواب دقیق برای آن ارائه نمودیم. در حد کاوشی (یعنی با چشم پوشی از پس کنش) نیز برای حالت بی جرم ($m^2 = 0$) و یک حالت جرم دار ($m^2 = 40$)، به ویژه با استفاده از روش تجزیه آدومیان، جواب های اختلالی را به صورت بسط سری مناسب برای تحلیل های نزدیک مرز به دست آوردیم.

از طرفی دیگر، به سبب اضافه کردن (پاد)غشاءهای ام کاوشگر زمینه SW(WR) مدل ABJM، پاریته، تمام ابرتقارن ها و نیز ناوردایی مقیاس توسط جواب های حجمی شکسته می شود و از گروه ایزومتری $SO(4,1)$ فضای $\mathrm{E}AdS_4$، $SO(4)$ باقی می ماند. بعلاوه، تقلیل یا برش سازگار به این معناست که تنها (شبه)اسکالرهای تکتایه $SU(4) \times U(1)$ (به عنوان تقارن فضای داخلی) از طیف ابرگرانشی ۱۱ بعدی باقی می مانند و معادلات حاصل در چهار بعد نیز هیچ مولفه فضای داخلی را شامل نمی شوند. برای تحقق این مدهای تکتایه و همچنین شکست ابرتقارن، تبادل سه نمایش بنیادی برای گراویتینو را در نظر گرفتیم و برای تحقق شکست پاریته در نظریه مرزی نیز تنها به بخش $U(1)$ از گروه پیمانه‌ای ضربی اصلی $\mathcal{G}$ متمرکز شدیم. سپس با استفاده از قواعد تناظر $\mathrm{AdS_4/CFT_3}$ و با درنظر گرفتن شرط مرزی دیریکله (یعنی درنظرگرفتن مدهای هنجارش پذیر)، با استفاده از یک اسکالر، یک فرمیون و یک میدان پیمانه ای تکتایه مرزی، تغییرشکل های از کنش چرن- سایمون- ماده مرزی (در واقع مدل ABJM) با عملگرهای حاشیه ای دقیق و نامربوط متناظر با مدهای بی جرم و جرمدار حجمی انجام دادیم؛ و در نهایت جواب های دقیقی به دست آوردیم که در واقع اینستنتون های (کوچک) روی یک ۳-کره با شعاع در بی نهایت هستند.

[DOI: 10.61882/jmph.7.2.21]

به عنوان نکته ای دیگر، با توجه به شکل عمومی جواب های (۴۴) برای فرمیون (ψ)، (۵۰) برای میدان پیمانه ای (A^+) (یا (۶۵) برای F^+) و (۶۶) برای اسکالر (φ)، می توان نوعی از دوگانی بوز-فرمی- برای نمونه [۳۴] را ببینید- در حد جواب ها و تناظر را به صورت $tr(\psi\bar{\psi}) \sim tr(\varphi\bar{\varphi})^2 \sim F^+$ و $\psi \sim A^+$ داشت؛ و لذا با این اوصاف، پتانسیل های منتسب به تغییرشکل های مرزی را از نوع نامقید از زیر[۲۱] خواهند بود که جواب های اینستنونی از نوع فوبینی [۱۹] را می پذیرند؛ برای بحث بیشتر در این زمینه [۲] را ببینید. تفسیر معادل این جواب ها در حجم، حباب های خلاء واقعی (AdS_-) است که در هر جایی درون خلاء کاذب (AdS_+) سر بر می آورند و چهار تقارن شکسته شده $SO(4,1)$ (تقارن های مقیاس و انتقالی) مسئول انتقال حباب به اطراف در حجم چهار بعدی هستند [۳۵].

در واقع به سبب خمش (پاد)غشاءهای ام اضافه شده حول جهت های فضای داخلی و خارجی، می توان گفت که شارهای دیوار قلمرو[۲۲] داریم که متناظر با حباب های دیوار نازک[۲۳] هستند که به طور نمایی درون خلاء کاذب گسترش گسترش می یابند [۳۶]؛ و این در نظریه مرزی معادل یک شار بین (نظریه در) نقاط ثابت فرابنفش (CFT_+) و فروسرخ (CFT_-) است. تفسیر معادل دیگر- برای نمونه در [۲۳] و [۳۷]- این است که غشاءهای M2 کاوشی خمیده شده حول سه جهت فضای داخلی (یعنی S^3/Z_k) منتج به دیوارهای قلمروی می شوند که میان خلاءهای مختلف برون یابی می کنند. در واقع با شکست ناوردایی همدیس، نظریه در تکه های u ثابت قرار دارد که مرز dS_3 با نشانگان لورنتزی است و آنسوی تقریب دیوار نازک، طبق بحث در [۳۸]، تغییرشکل ها با عملگرهای نامربوط است. به همین ترتیب، برای دوگان این حباب های خلاء در فضای آنتی دوسیته که سرنوشت نهایی آنها طبق [۱۰] فروپاشی به درون تکینگی نابودی بزرگ است، در [۳۹] تغییر شکل های جرمی از مدل ABJM روی فضای دوسیته سه بعدی در نظر گرفته شده است.

در نهایت، مدل تقلیل یافته در اینجا علاوه بر اینکه نمونه ای از خلاءهای AdS ناپایدار بدون ابرتقارن [۴۰] را ارائه می دهد، دارای کاربردهای در کیهانشاسی جهان اولیه، مدل های تورمی و تونل زنی (در قالب جواب های جستان) است- برای نمونه، [۴۱] و مراجع آن را نگاه کنید- و لذا انجام تحقیق بیشتر در این زمینه ها با چنین مدلی جالب خواهد بود.

مراجع

[1] M. Naghdi, "A truncation of 11-dimensional supergravity for Fubini-like instantons in $\mathrm{AdS}_4/\mathrm{CFT}_3$", Fortschr. Phys. 67, 1800044 (2018), [arXiv:1708.02530 [hep-th]].

[2] M. Naghdi, "Instantons in AdS_4 from (anti)membranes wrapping $\mathrm{S}^7$to Bose-Fermi duality in CFT_3's", Eur. Phys. J. Plus 138, 45 (2023), [arXiv:2002.06547 [hep-th]].

[21] Unbounded from below
[22] Domain-wall
[23] Thin-wall

[DOI: 10.61882/jmph.7.2.21]

[3] M. Naghdi, "Solutions for scalar equations in AdS_4 with Adomian method and boundary CFT_3 duals", Eur. Phys. J. Plus 138, 300 (2023), [arXiv:2005.00358 [hep-th]].

[۴] محمد نقدی، " جواب‌های اینستنتونی در مدلی از تناظر $\mathrm{AdS}_۴/\mathrm{CFT}_۳$ "، مجله پژوهش فیزیک ایران، جلد ۲۰، شمـاره ۳، صفحه ۴۷۱، پاییز ۱۳۹۹.

[5] M. Naghdi, "Higgs-like (pseudo)Scalars in AdS_4, Marginal and Irrelevant Deformations in CFT_3 and Instantons on S^3 ", Chin. Phys. C 48, 043104 (2024), [arXiv:2311.11671 [hep-th]].

[6] O. Aharony, O. Bergman, D. L. Jafferis and J. Maldacena, "$\mathcal{N}$=6 superconformal Chern-Simons matter theories, M2-branes and their gravity duals", JHEP 0810, 091 (2008), [arXiv:0806.1218 [hep-th]].

[7] G. Adomian, "Solving frontier problems of physics: The decomposition method", Springer, 1st Edition (1994).

[8] E. Bergshoeff, M. de Roo, E. Eyras, B. Janssen and J. P. van der Schaar, "Multiple intersections of D-branes and M-branes,", Nucl. Phys. B 494, 119 (1997), [arXiv:hep-th/9612095].

[9] S. R. Coleman and F. De Luccia, "Gravitational effects on and of vacuum decay", Phys. Rev. D 21, 3305 (1980).

[10] L. F. Abbott and S. Coleman, "The collapse of an anti-de Sitter bubble", Nucl. Phys. B 259, 4170 (1985).

[11] F. C. Adams, “General solutions for tunneling of scalar fields with quartic potentials”, Phys. Rev. D 48, 2800 (1993), [arXiv:hep-ph/9302321].

[12] E. Witten, "Anti-de Sitter space and holography", Adv. Theor. Math. Phys. 2, 253 (1998), [arXiv:hep-th/9802150].

[13] D. Z. Freedman, S. D. Mathur, A. Matusis and L. Rastelli, "Correlation functions in the $\mathrm{CFT}_d/\mathrm{AdS}_{d+1}$ correpondence", Nucl. Phys. B 546, 96 (1999), [arXiv:hep-th/9804058].

[14] A.-M. Wazwaz, "Partial Differential Equations and Solitary Waves Theory", Springer, 1nd Edition (2009).

[15] M. Naghdi, "Non-Minimally Coupled Pseudoscalars in AdS_4 for Instantons in CFT_3", Class. Quant. Grav. 33, 115005 (2016), [arXiv:1505.00179 [hep-th]].

[16] M. J. Duff, B. E. W. Nilsson and C. N. Pope, "Superunification from eleven dimensions", Nucl. Phys. B 233, 433 (1984).

[17] D. N. Page and C. N. Pope, "Instabilities in Englert-type supergravity solutions", Phys. Lett. B 145, 333 (1984).

[18] J. P. Gauntlett, S. Kim, O. Varela and D. Waldram, "Consistent supersymmetric Kaluza–Klein truncations with massive modes", JHEP 0904, 102 (2009), [arXiv:0901.0676 [hep-th]].

[19] S. Fubini, "A new approach to conformal invariant field theories", Nuovo Cim. A 34, 521 (1976).

[20] M. Naghdi, "Massive (pesudo)scalars in AdS_4, $SO(4)$ invariant solutions and holography", Eur. Phys. J. Plus 133, 307 (2018), [arXiv:1703.02765 [hep-th]].

[21] M. J. Duff, B. E. W. Nilsson and C. N. Pope, "Kaluza-Klein Supergravity", Phys. Rept. 130, 1 (1986).

[22] M. Bianchi, R. Poghossian and M. Samsonyan, "Precision spectroscopy and higher spin symmetry in the ABJM model", JHEP 1010, 021 (2010), [arXiv:1005.5307 [hep-th]].

[23] I. Bena, "The M theory dual of a three-dimensional theory with reduced supersymmetry", Phys. Rev. D 62, 126006 (2000), [arXiv:hep-th/0004142].

[24] O. Aharony, O. Bergman, D. L. Jafferis, "Fractional M2-branes", JHEP 0811, 043 (2008), [arXiv:0807.4924 [hep-th]].

[25] X. Chu, H. Nastase, B. Nilsson and C. Papageorgakis, "Higgsing M2 to D2 with gravity: $\mathcal{N}=6$ chiral supergravity from topologically gauged ABJM theory", JHEP 1104, 040 (2011), [arXiv:1012.5969 [hep-th]].

[26] P. Breitenlohner and D. Z. Freedman, "Positive energy in anti-de Sitter backgrounds and gauged extended supergravity", Phys. Lett. B 115, 197 (1982).

[27] V. Balasubramanian, P. Kraus and A. Lawrence, "Bulk vs boundary dynamics in anti-de Sitter spacetime", Phys. Rev. D 59, 046003 (1999), [arXiv:hep-th/9805171].

[DOI: 10.61882/jmrph.7.2.21]

[28] I. R. Klebanov and E. Witten, "AdS/CFT correspondence and symmetry breaking", Nucl. Phys. B 556, 89 (1999), [arXiv:hep-th/9905104].

[29] S. Terashima, "On M5-branes in $\mathcal{N}=6$ membrane action", JHEP 0808, 080 (2008), [arXiv:0807.0197 [hep-th]].

[30] M. Naghdi, "New instantons in $\mathrm{AdS}_4/\mathrm{CFT}_3$ from D4-branes wrapping some of CP^3", Phys. Rev. D 88, 026013 (2013), [arXiv:1302.5294 [hep-th]].

[31] M. Naghdi, "Marginal fluctuations as instantons on M2/D2-branes", Eur. Phys. J. C 74, 2826 (2014), [arXiv:1302.5534 [hep-th]].

[32] M. Naghdi, "Dual localized objects from M-branes over $\mathrm{AdS}_4 \times \mathrm{S}^7/\mathrm{Z}_\mathrm{k}$", Class. Quant. Grav. 32, 215018 (2015), [arXiv:1502.03281 [hep-th]].

[33] N. Seiberg and E. Witten, "String theory and noncommutative geometry", JHEP 9909, 032 (1999), [arXiv:hep-th/9908142].

[34] Sh. Minwalla and Sh. Yokoyama, "Chern Simons Bosonization along RG Flows", JHEP 1602, 103 (2016), [arXiv:1507.04546 [hep-th]].

[35] M. Smolkin and N. Turok, "Dual description of a 4d cosmology", [arXiv:1211.1322 [hep-th]].

[36] J. L. F. Barbon and E. Rabinovici, "Holography of AdS vacuum bubbles", JHEP 1004, 123 (2010), [arXiv:1003.4966 [hep-th]].

[37] J. Garriga, "Holographic description of vacuum bubbles", Prog. Theor. Phys. Suppl. 190, 261 (2011), [arXiv:1012.5996 [hep-th]].

[38] J. Maldacena, "Vacuum decay into Anti de Sitter space", [arXiv:1012.0274 [hep-th]].

[39] S. P. Kumar and V. Vaganov, "Probing crunching AdS cosmologies", JHEP 1602, 026 (2016), [arXiv:1510.03281 [hep-th]].

[40] H. Ooguri and C. Vafa, "Non-supersymmetric AdS and the Swampland", Adv. Theor. Math. Phys. 21, 1787 (2017), [arXiv:1610.01533 [hep-th]].

[41] W. Lee, B.-H. Lee, Ch. H. Lee and Ch. Park, "False vacuum bubble nucleation due to a nonminimally coupled scalar field", Phys. Rev. D 74, 123520 (2006), [arXiv:hep-th/0604064].

[DOI: 10.61882/jmrph.7.2.21]

A Consistent Truncation of 11D Supergravity, (pseudo)Scalars in AdS_4 Space and Exact Dual Solutions in the Boundary 3D Field Theory

M. Naghdi

Department of Physics, Faculty of Basic Sciences, University of Ilam, Ilam, Iran.

Abstract

Starting from 11-dimensional supergravity over $AdS_4 \times CP^3 \ltimes S^1/Z_k$ and adding a new 4-form field-strength, we get a consistent Kaluza-Klein reduction. In fact, the resulting $SU(4) \times U(1)$-singlet (pseudo)scalars in the 4-dimensional Euclidean anti-de Sitter space arise from probe (anti)M-branes wrapped around directions of the internal space, in the (Wick-rotated) skew-whiffed background; and the resulting anti-M2-branes theory breaks all supersymmetries and parity of the original theory. In addition, the bulk (scalar) equations and solutions break the scale-invariance. Taking the backreaction on the external and internal spaces, the resulting equations correspond to exactly marginal ($\varDelta_+ = 3$) and marginally irrelevant boundary operators. Presenting exact solutions for the equation when taking the backreaction and solving the main bulk equation in probe approximation for the massless ($m^2 = 0$) and a massive ($m^2 = 40$) mode with math methods and especially the Adomian decomposition method, we get perturbative solutions appropriate for near the boundary analyzes. Such solutions have at least the $SO(4)$ symmetry and present instantons responsible for tunnelling among almost degenerate vacua of the Higgs-like scalar potential or true-vacuum bubbles growing from the false vacuum in the form of bounce solutions. To realize the bulk symmetries and in particular supersymmetry breaking, we swap the three fundamental representations of $SO(8)$ for gravitino and as a result, we realize the desired singlet (pseudo)scalars in the spectrum. As the same way, by focusing on the $U(1) \times U(1)$ part of the original quiver gauge group of the 3-dimensional boundary Chern-Simons-matter (ABJM) theory, taking just a single boundary scalar and a single fermion, introducing various marginal and irrelevant ($\varDelta_+ = 8$) boundary operators and deforming

[DOI: 10.61882/jmrph.7.2.21]

the boundary action with them, we finally arrive at exact solutions with finite actions which are in fact small instantons on a three-sphere at infinity. In addition, using the AdS_4/CFT_3 duality rules, we confirm the state-operator correspondence in the leading order and match elements of the bulk and boundary solutions.

Key Words: 11-Dimensional supergravity, Consistent truncation, (pseudo)Scalars in AdS_4 space, Adomian decomposition method, AdS_4/CFT_3 correspondence, Dual boundary operators, Instantons.