مدل سازی اثرات کوانتومی در پلاسماهای الکترواستاتیکی بدون برخورد و مقایسه نتایج در دو چارچوب خطی و غیرخطی

زینب کیامهر[1]

[*1] دانشکده فیزیک، دانشگاه تفرش، تفرش، ایران

اطلاعات مقاله

تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۸/۲۸
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۵/۲/۷
تاریخ چاپ: ۱۴۰۵/۳/۱۰

شاپای چاپی: 2588-493x
شاپای الکترونیکی: 2588-4921

* نویسنده مسئول
z.kiamehr@tafreshu.ac.ir

چکیده

فیزیک پلاسمای کلاسیک عمدتاً بر رژیم‌هایی با دماهای بالا و چگالی‌های پایین متمرکز است که در آن‌ها اثرات مکانیک کوانتومی ناچیز بوده و توصیف بر پایه‌ی معادلات ولاسوف–پواسون کفایت می‌کند. با این حال، پیشرفت‌های اخیر در نانوساختارهای فلزی، ادوات نیمه‌رسانا و سامانه‌های چگال، ضرورت بررسی پلاسماها در رژیم‌هایی را آشکار ساخته است که اثرات کوانتومی ذرات نقش تعیین‌کننده‌ای در دینامیک سامانه ایفا می‌کنند. در این مقاله، یک مرور تحلیلی و مقایسه‌ای منسجم از چارچوب‌های نظری متداول برای توصیف پلاسماهای کوانتومی الکترواستاتیک و بدون برخورد ارائه می‌شود که شامل مدل جنبشی کامل ویگنر–پواسون، توصیف معادل هارتری، مدل‌های سیالی کوانتومی و تقریب‌های جنبشی نیمه‌کلاسیکی است. تمرکز اصلی این مرور بر تعیین حدود اعتبار این مدل‌ها، به‌ویژه در رژیم‌های غیرخطی، و مقایسه‌ی فرضیات فیزیکی نهفته در هر یک از آن‌هاست. با اتکا به نتایج تحلیلی موجود و شبیه‌سازی‌های عددی منتخب معادلات ولاسوف–پواسون و ویگنر–پواسون، نشان داده می‌شود که تفاوت میان توصیف کلاسیک و کوانتومی صرفاً به اصلاح کمی نرخ میرایی لاندائو در رژیم خطی محدود نمی‌شود، بلکه به‌طور کیفی در مسیر تکامل غیرخطی سامانه بروز می‌کند. در چارچوب کلاسیک، اشباع میرایی از طریق trapping ذرات و تشکیل ساختارهای پایدار فضای فاز رخ می‌دهد، در حالی که در توصیف ویگنر–پواسون، غیرموضعی‌بودن و تداخلات کوانتومی مانع از شکل‌گیری و پایداری این ساختارها شده و میرایی مؤثر حتی در زمان‌های طولانی نیز تداوم می‌یابد. همچنین نشان داده می‌شود که مدل‌های سیالی و نیمه‌کلاسیکی، اگرچه در برخی رژیم‌های گذار کاربردپذیرند، می‌توانند دینامیک غیرخطی و شدت واقعی میرایی را به‌طور نظام‌مند کم‌برآورد کنند. درواقع این مقاله با ارائه‌ی یک چارچوب مقایسه‌ای روشن، مرز میان رژیم‌های کلاسیک، گذار و کوانتومی را مشخص کرده و مبنایی منسجم برای تفسیر نتایج نظری و عددی موجود در مطالعه‌ی پلاسماهای کوانتومی بدون برخورد، به‌ویژه در سامانه‌های چگال، فراهم می‌سازد.

واژگان کلیدی: فیزیک پلاسما، اثرات کوانتومی، مدل سازی در پلاسماها، پلاسمای بدون برخورد، مدل جنبشی.

۱-مقدمه

فیزیک پلاسما به مطالعه‌ی دینامیکN جسمی سامانه‌هایی از ذرات باردار می‌پردازد که از طریق برهم‌کنش‌های الکترومغناطیسی بلندبرد با یکدیگر کوپل شده‌اند. این شاخه از فیزیک از اوایل قرن بیستم، هم‌زمان با پژوهش‌ها درباره‌ی تخلیه‌ی گازها، شکل گرفت و پس از جنگ جهانی دوم، به‌ویژه در پی کاربردهای بالقوه در هم‌جوشی هسته‌ای و فیزیک فضایی، گسترش چشمگیری یافت [۱،۲]. در بسیاری از پلاسماهای داغ اخترفیزیکی و هم‌جوشی، دماهای بالا و چگالی‌های نسبتاً پایین سبب می‌شوند که اثرات مکانیک کوانتومی قابل صرف‌نظر کردن باشد و توصیف کلاسیک بر پایه‌ی معادلات ولاسوف–ماکسول یا ولاسوف–پواسون کفایت کند [۳]. با این حال، در طیف گسترده‌ای از سامانه‌های فیزیکی، اثرات جمعی پلاسما و ویژگی‌های کوانتومی ذرات به‌طور هم‌زمان اهمیت می‌یابند؛ وضعیتی که چارچوب‌های کلاسیک در توصیف آن با محدودیت‌های بنیادی مواجه می‌شوند.

نمونه‌ی شاخص چنین سامانه‌هایی گاز الکترونی در فلزات و نانوساختارهای فلزی است که در آن الکترون‌های ظرفیت به‌صورت شبه‌آزاد در شبکه‌ی بلوری حرکت می‌کنند. در چگالی‌ها و دماهای متعارف فلزی، رفتار کوانتومی الکترون‌ها (از جمله تبعیت از آمار فرمی–دیراک و وجود طول موج دوبروی قابل‌ملاحظه) نقشی اساسی در تعیین پاسخ جمعی سامانه ایفا می‌کند و این سیستم‌ها را می‌توان به‌عنوان پلاسماهای کوانتومی در نظر گرفت [۶–۴]. پیشرفت‌های اخیر در ساخت و کنترل نانوساختارهای فلزی، از خوشه‌ها و نانوذرات تا لایه‌های نازک، مطالعه‌ی چنین پلاسماهایی را از یک مسئله‌ی صرفاً نظری به موضوعی تجربی و کاربردی بدل کرده است [۷،۸]. به‌طور مشابه، در ادوات نیمه‌رسانای مدرن، کوچک‌سازی ساختارها به ابعادی هم‌مرتبه با طول موج دوبروی حامل‌های بار موجب شده است که اثرات موجی و پدیده‌هایی نظیر تونل‌زنی کوانتومی و برهم‌کنش‌های جمعی الکترونی به‌طور اجتناب‌ناپذیر وارد تحلیل عملکرد سامانه شوند [۹،۱۰]. افزون بر این، پلاسماهای کوانتومی در برخی اجرام اخترفیزیکی متراکم، نظیر ستاره‌های کوتوله‌ی سفید، نیز نقش تعیین‌کننده‌ای دارند [۱۱]. این تنوع کاربردها نشان می‌دهد که پلاسماهای کوانتومی تنها یک کنجکاوی نظری نیستند، بلکه به طیف وسیعی از مسائل بنیادی و کاربردی مرتبط‌اند.

برای توصیف این سامانه‌ها، چارچوب‌های نظری متعددی توسعه یافته‌اند؛ از توصیف‌های جنبشی کامل مبتنی بر معادله‌ی ویگنر و فرمالیسم هارتری گرفته تا مدل‌های سیالی کوانتومی و تقریب‌های نیمه‌کلاسیک [۱۲–۱۶]. هر یک از این رویکردها بر فرضیات فیزیکی متفاوتی استوار است و دامنه‌ی اعتبار خاص خود را دارد. با وجود این، بخش قابل‌توجهی از ادبیات موجود یا به تحلیل‌های خطی محدود می‌شود [۱۷،۱۸] یا بدون مقایسه‌ی نظام‌مند میان مدل‌ها، نتایج را در چارچوب یک توصیف خاص تفسیر می‌کند. این مسئله به‌ویژه در رژیم‌های غیرخطی اهمیت می‌یابد؛ جایی که پدیده‌هایی نظیر میرایی لاندائو، trapping ذرات و تشکیل ساختارهای گردابه‌ای در فضای فاز نقش اساسی در تکامل سامانه دارند [۲۱–۱۹]. پرسش کلیدی این است که اثرات کوانتومی تا چه حد می‌توانند این سازوکارهای کلاسیک را اصلاح یا حتی به‌طور کیفی دگرگون کنند؛ پرسشی که پاسخ آن در ادبیات موجود همچنان محل بحث و گاه مناقشه است [۲۴–۲۲].

انگیزه‌ی اصلی این پژوهش دقیقاً از همین نقطه ناشی می‌شود. با وجود مطالعات متعدد درباره‌ی میرایی لاندائو کوانتومی و دینامیک غیرخطی پلاسماهای بدون برخورد، هنوز تصویر منسجمی از این‌که در چه شرایطی توصیف‌های کلاسیک، نیمه‌کلاسیک یا کاملاً کوانتومی قابل اعتماد هستند، در دست نیست. به‌ویژه، نقش اثرات کوانتومی در سرکوب یا تغییر ساختارهای کلاسیک فضای فاز و پیامدهای آن برای اشباع غیرخطی امواج و نرخ میرایی مؤثر، به‌طور پراکنده و بعضاً متناقض گزارش شده است [۲۷–۲۵]. این خلأ مفهومی، ضرورت ارائه‌ی یک مرور تحلیلی و مقایسه‌ای را برجسته

می‌سازد که بتواند نتایج پراکنده‌ی موجود را در یک چارچوب فیزیکی واحد گرد آورد.

بر این اساس، هدف این مقاله ارائه‌ی یک مرور منسجم، تحلیلی و نظام‌مند از چارچوب‌های نظری مورد استفاده در توصیف پلاسماهای کوانتومی الکترواستاتیک و بدون برخورد است. سهم اصلی این کار در سازمان‌دهی و مقایسه‌ی انتقادی رویکردهای جنبشی کامل (نظیر ویگنر–پواسون و هارتری)، مدل‌های سیالی کوانتومی و توصیف‌های نیمه‌کلاسیک نهفته است، به‌گونه‌ای که فرضیات بنیادی، مقیاس‌های حاکم و محدودیت‌های فیزیکی هر مدل به‌صورت شفاف مشخص شوند. در این مقاله، با تکیه بر نتایج تحلیلی شناخته‌شده و شبیه‌سازی‌های عددی منتخب، نشان داده می‌شود که تفاوت میان توصیف کلاسیک ولاسوف–پواسون و توصیف کاملاً کوانتومی ویگنر–پواسون در رژیم‌های غیرخطی صرفاً به اصلاح کمی نرخ میرایی محدود نمی‌شود، بلکه می‌تواند به تغییر کیفی مسیر تکامل سامانه، از جمله سرکوب تشکیل گردابه‌های فضای فاز، بی انجامد. نتایج مرورشده همچنین نشان می‌دهند که در چنین رژیم‌هایی، مدل‌های نیمه‌کلاسیکی ممکن است میرایی لاندائو را به‌طور نظام‌مند کمتر از مقدار واقعی برآورد کنند. بدین‌ترتیب، نوآوری این مقاله نه در معرفی یک مدل جدید، بلکه در تعیین مرزهای فیزیکی میان رژیم‌های کلاسیک، گذار و کوانتومی، و ارائه‌ی یک چارچوب مفهومی منسجم برای تفسیر نتایج تحلیلی و عددی پیشین نهفته است؛ چارچوبی که می‌تواند برای پژوهشگران فعال در حوزه‌ی پلاسماهای کوانتومی چگال، نانوساختارها، سامانه‌های فلزی و ادوات الکترونیکی پیشرفته، به‌عنوان مبنایی قابل اعتماد برای تحلیل و توسعه‌ی مطالعات آینده مورد استفاده قرار گیرد.

۲-رژیم‌های فیزیکی برای پلاسماهای کلاسیک و کوانتومی

در این بخش، پارامترهای شناخته‌شده‌ای مرور می‌شوند که مقیاس‌های اساسی طول، زمان و سرعت را در پلاسماهای کلاسیک و کوانتومی تعیین می‌کنند. این کمیت‌ها بر پایه‌ی ملاحظات استاندارد تحلیل ابعادی معرفی شده و در ادبیات فیزیک پلاسما به‌طور گسترده مورد استفاده قرار گرفته‌اند. بدیهی است که تفسیر دقیق فیزیکی این پارامترها (برای مثال تمایز میان مقیاس‌های زمانی نوسانی و میرایی) نیازمند تحلیل‌های جنبشی عمیق‌تری است؛ با این حال، هدف در اینجا ارائه‌ی تصویری کیفی و یک طبقه‌بندی مفهومی از آن‌هاست. در ادامه، پارامترهای بدون‌بعد کلیدی معرفی می‌شوند که امکان تفکیک رژیم‌های فیزیکی مختلف را فراهم می‌سازند. این رژیم‌ها بر اساس غلبه‌ی یک سازوکار فیزیکی بر دیگری تعریف می‌شوند؛ به‌طور مشخص، معیارهایی مرور می‌شوند که تمایز میان رفتار کلاسیک و کوانتومی پلاسما، و نیز نقش نسبی اثرات جمعی (بدون برخورد) در برابر برهم‌کنش‌های دوجسمی (برخوردی) را مشخص می‌کنند [۱۵].

۲-۱ پلاسماهای کلاسیک

پلاسمایی را در نظر بگیرید که دارای چگالی عددی n بوده و از ذراتی (معمولاً الکترون‌ها) با جرم m و بار الکتریکی e تشکیل شده است. این ذرات از طریق نیروهای کولنی (که مستلزم وجود گذردهی الکتریکی ε_0 است) با یکدیگر برهم‌کنش دارند. با استفاده از این چهار پارامتر بنیادی، می‌توان کمیتی ساخت که دارای ابعاد معکوس زمان، یعنی فرکانس، باشد:

$$\omega_p = \left(\frac{e^2 n}{m\varepsilon_0}\right)^{1/2} \qquad (۲.۱)$$

این کمیت به‌عنوان فرکانس پلاسما شناخته می‌شود و بیانگر فرکانس نوسان مشخصه‌ی الکترون‌هایی است که در یک پس‌زمینه‌ی خنثی‌کننده از یون‌های مثبت غوطه‌ورند؛ یون‌هایی که به دلیل جرم بسیار بزرگ‌ترشان، بی‌حرکت فرض می‌شوند. این نوسانات از آن‌جا ناشی می‌شوند که هرگونه کمبود موضعی الکترون، یک بار مثبت خالص ایجاد کرده و نیروی کولنی حاصل، الکترون‌ها را به سوی آن ناحیه می‌کشد. به دلیل اینرسی، الکترون‌ها صرفاً ناحیه‌ی مثبت را پر نکرده، بلکه از آن عبور می‌کنند و بدین ترتیب، نوسان‌های الکترونی در فرکانس پلاسما شکل می‌گیرد[۱۸]. در غیاب اثرات برخورد، این پدیده موجب نوسانات الکترونی نامیرا در فرکانس پلاسما می‌شود. لازم به ذکر است که فرکانس پلاسما به دما

وابسته نیست. با این حال، اگر دمای محدود T را به مجموعه پارامترها اضافه کنیم، می‌توانیم یک سرعت مشخصه بسازیم:

$$v_T = (\frac{K_B T}{m})^{1/2} \qquad (۲.۲)$$

این سرعت، سرعت حرارتی نامیده می‌شود، که در آن K_B ثابت بولتزمن است. این کمیت، درست مانند گازهای معمولی، سرعت معمول ناشی از حرکت حرارتی تصادفی الکترون‌ها را نشان می‌دهد. با ترکیب دو کمیت فوق، می‌توان یک مقیاس طول معمول، طول دبای، را تعریف کرد:

$$\lambda_D = \frac{v_T}{\omega_p} = (\frac{\varepsilon_0 K_B T}{ne^2})^{1/2} \qquad (۲.۳)$$

طول دبای پدیده مهم غربالگری الکترواستاتیک را توصیف می‌کند. هنگامی که یک بار مثبت اضافی به درون پلاسما تزریق می‌شود، به سرعت توسط ابری از الکترون‌های متحرک‌تر که سریع‌تر واکنش نشان می‌دهند، احاطه می‌گردد. در نتیجه، این بار مثبت تا حدی غربالگری شده و عملاً برای سایر ذراتی که در فاصله‌ای به اندازه کافی بزرگ قرار دارند، نامرئی خواهد بود. از دیدگاه کمی، این بدان معناست که پتانسیل الکترواستاتیک تولید شده توسط یک بار اضافی، برخلاف خلاء که پتانسیل در آن به صورت $1/r$ کاهش می‌یابد، از پتانسیل شبه‌یوکاوا با شکل $(\exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right))/r$ تبعیت می‌کند. این پتانسیل بسیار سریع‌تر و در فاصله‌ای در حدود طول دبای میرا می‌شود. غربالگری دبای ریشه یکی از اساسی‌ترین ویژگی‌های پلاسما، یعنی شبه‌خنثایی (Quasi-neutrality)، است. جداسازی بار در پلاسما تنها در مقیاس‌هایی کوچکتر از λ_D می‌تواند پابرجا بماند و در فواصل بزرگتر به شدت توسط غربالگری سرکوب می‌شود [۲۲و۲۰]. اکنون بیایید با استفاده از کمیت‌های موجود، یک پارامتر بدون بعد بسازیم. به سادگی می‌توان مشاهده کرد که تنها یک پارامتر بدون بعد قابل ساخت است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$g_C = \frac{e^2 n^{1/3}}{\varepsilon_0 K_B T} \qquad (۲.۴)$$

این کمیت به‌عنوان پارامتر جفت‌شدگی (کلاسیک) یا پارامتر دانه‌بندی شناخته می‌شود. تفسیر فیزیکی آن ساده است: پارامتر جفت‌شدگی (g_C) نسبت انرژی برهمکنش الکتریکی (E_{int}) به انرژی جنبشی متوسط ذرات (E_{kin}) را اندازه می‌گیرد. به‌طور مشخص، اگر انرژی برهم‌کنش برای ذراتی با فاصله بین ذره‌ای معمول $d = n^{1/3}$ برابر $E_{int} = \frac{e^2}{\varepsilon_0 d}$ و انرژی جنبشی متوسط $E_{kin} = K_B T$ در نظر گرفته شود، رابطه‌ی (۲.۴) مستقیماً به دست می‌آید. پارامتر $g_C = \frac{E_{int}}{E_{kin}}$ این امکان را به ما می‌دهد که ماهیت فیزیکی پارامتر جفت‌شدگی را حدس بزنیم. هنگامی که g_C کوچک باشد، پلاسما تحت سلطه اثرات حرارتی قرار دارد، در حالی که برهمکنش‌های کولنی دو جسمی (یعنی برخوردهای دوتایی) ضعیف باقی می‌مانند. در این رژیم، میدان غالب که بر ذرات باردار اعمال می‌شود، میدان میانگین غیرمحلی است که مسئول اثرات جمعی معمول می‌باشد. این حالت به عنوان رژیم بدون برخورد (Collisionless Regime) شناخته می‌شود. در مقابل، وقتی $g_C \simeq 1$ یا بزرگتر باشد، برخوردهای دوتایی را نمی‌توان نادیده گرفت و پلاسما برخوردی یا به شدت جفت‌شده (Strongly Coupled) نامیده می‌شود. همچنین توجه داریم که طبق معادله (2.4)، پلاسمای کلاسیک در دماهای بالا و چگالی‌های پایین، بدون برخورد است. به طور جایگزین، g_C را می‌توان به صورت معکوس تعداد ذرات موجود در حجمی با بعد خطی λ_D، که به توان خاصی رسیده است، بیان کرد:

$$g_C = (\frac{1}{n\lambda_D{}^3})^{2/3} \qquad (۲.۵)$$

این نشان می‌دهد که زمانی که پوش دبای (Debye Shielding)مؤثر باشد، یعنی هنگامی که تعداد زیادی الکترون در حجم دبای (Debye Sphere) وجود داشته باشد، پلاسما بدون برخورد است [25].

۲-۲ پلاسمای کوانتومی

اثرات کوانتومی را می‌توان با استفاده از طول موج حرارتی دوبروی ذرات تشکیل‌دهنده‌ی پلاسما کمی‌سازی کرد.

$$\lambda_B = \frac{\hbar}{m v_T} \qquad (۲.۶)$$

این طول موج تقریباً بیانگر امتداد فضایی تابع موج یک ذره، ناشی از عدم قطعیت کوانتومی، است. در رژیم‌های کلاسیک، طول موج دوبروی آن‌قدر کوچک است که می‌توان ذرات را نقطه‌ای در نظر گرفت؛ ازاین‌رو، هم‌پوشانی توابع موج و تداخل کوانتومی رخ نمی‌دهد. بر این اساس، منطقی است که فرض کنیم اثرات کوانتومی زمانی شروع به ایفای نقش مهمی

می‌کنند که طول موج دوبروی با فاصله‌ی متوسط بین ذرات ($n^{-1/3}$) برابر یا بزرگتر باشد، یعنی زمانی که

$$n{\lambda_B}^3 \geq 1 \qquad (۲.۷)$$

از سوی دیگر، همانطور که از مکانیک آماری گازهای معمولی [23] کاملاً مشخص است، اثرات کوانتومی زمانی اهمیت پیدا می‌کنند که دما پایین‌تر از دمای فرمی (T_F) باشد، که این دما به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$K_B T_F \equiv E_F = \frac{\hbar^2}{2m}(3\pi^2)^{2/3} n^{2/3} \qquad (۲.۸)$$

که در آن انرژی فرمی (E_F) معرفی می‌شود. هنگامی که T به T_F نزدیک می‌شود، توزیع آماری مربوطه از توزیع ماکسول-بولتزمن به توزیع فرمی-دیراک تغییر می‌کند. اکنون، به راحتی می‌توان دید که نسبت $\chi \equiv \frac{T}{T_F}$ به سادگی با پارامتر بدون بعد ${n\lambda_B}^3$ که در بالا مورد بحث قرار گرفت، مرتبط است:

$$\chi \equiv \frac{T}{T_F} = \frac{1}{2}(3\pi^2)^{2/3}({n\lambda_B}^3)^{2/3} \qquad (۲.۹)$$

پارامتر بی‌بعد $\chi = \frac{\hbar k}{m v_{ph}}$ به‌عنوان یک شاخص فیزیکی کلیدی برای سنجش اهمیت اثرات کوانتومی در دینامیک موج–ذره معرفی می‌شود. این پارامتر نسبت تکانه کوانتومی تبادلی $\hbar k$ به تکانه مشخص ذرات رزونانسی با سرعت فاز $v_{ph} = \omega/k$ را اندازه‌گیری می‌کند و بنابراین مستقیماً تعیین می‌کند که آیا برهم‌کنش موج–ذره را می‌توان به‌صورت موضعی و کلاسیک توصیف کرد یا خیر. در حد $\chi \ll 1$، تغییر تکانه ناشی از تبادل کوانتومی در مقایسه با تکانه ذرات ناچیز است و معادله ویگنر–پواسون به‌طور مؤثر به حد ولاسوف–پواسون کاهش می‌یابد، به‌طوری‌که میرایی لاندائو و اشباع غیرخطی از همان سازوکارهای کلاسیک ناشی از تله‌افتادگی ذرات تبعیت می‌کنند. در مقابل، هنگامی که χبه مقادیر مرتبه واحد می‌رسد، پهنای کوانتومی ناحیه رزونانس با پهنای دینامیکی آن قابل‌مقایسه می‌شود و این امر به اصلاح نرخ میرایی و تضعیف تدریجی تشکیل ساختارهای منسجم فضای فاز می‌انجامد. در نهایت، در رژیم $\chi \gtrsim 1$، تبادل تکانه کوانتومی به‌اندازه‌ای بزرگ است که توصیف مسیرهای شبه‌کلاسیکی ذرات رزونانسی اعتبار خود را از دست می‌دهد و در نتیجه، سازوکارهای غیرخطی کلاسیک نظیر گردابه‌های پایدار فضای فاز به‌طور مؤثر سرکوب می‌شوند. از این منظر، χ نه‌تنها یک پارامتر مقیاس‌گذاری، بلکه یک معیار عملی برای تفکیک رژیم‌هایی است که در آن‌ها استفاده از مدل نیمه‌کلاسیکی کافی است از رژیم‌هایی که توصیف کامل ویگنری برای ثبت فیزیک غیرموضعی و کوانتومی ضروری می‌شود.

اکنون می‌خواهیم مقیاس‌های معمول فضا، زمان و سرعت را برای یک پلاسمای کوانتومی، و همچنین پارامترهای بدون بعد مربوطه، تعیین کنیم. اول از همه، تأکید می‌کنیم که عبارات ساده را تنها می‌توان در حالت‌های حدی $T \gg T_F$ (مطابق با حالت کلاسیک که قبلاً بررسی شد) و $T \ll T_F$ یافت؛ حالت دوم رژیم عمیقاً کوانتومی (کاملاً منحط) است که می‌خواهیم آن را تجزیه و تحلیل کنیم. البته، یک گذار آرام بین این دو رژیم وجود خواهد داشت، اما این موضوع را نمی‌توان با استفاده از استدلال‌های ابعادی ساده بررسی کرد.

در مورد مقیاس زمانی معمول برای پدیده‌های جمعی، این مقیاس همچنان توسط معکوس فرکانس پلاسما (معادله 2.1) تعیین می‌شود، حتی در رژیم کوانتومی. در دماهای بسیار پایین، مفهوم سرعت حرارتی کارایی خود را از دست می‌دهد و باید با سرعت مشخصه‌ای جایگزین شود که توزیع فرمی–دیراک را توصیف می‌کند.

$$v_F = (\frac{2E_F}{m})^{1/2} = \frac{\hbar}{m}(3\pi^2 n)^{1/3} \qquad (۲.۱۰)$$

با داشتن فرکانس پلاسما و سرعت فرمی، یک مقیاس طول مشخص به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\lambda_F = \frac{v_F}{\omega_p} \qquad (۲.۱۱)$$

که معادل کوانتومی طول دبای به شمار می‌رود. درست مانند طول دبای، λ_F طول مقیاس پوشش الکترواستاتیک را در یک پلاسمای کوانتومی توصیف می‌نماید. پارامتر کوپلینگ کوانتومی را می‌توان به صورت نسبت انرژی برهمکنش (E_{int}) به میانگین انرژی جنبشی (E_{kin}) تعریف کرد. انرژی برهمکنش مشابه حالت کلاسیک است، در حالی که انرژی جنبشی اکنون با رابطه انرژی فرمی $E_{kin} = E_F$، داده

می‌شود[۲۳]. با در نظر گرفتن این مفروضات، پارامتر کوپلینگ کوانتومی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$g_Q = \frac{E_{int}}{E_F} = \frac{2}{(3\pi^2)^{2/3}} \frac{e^2 m}{\hbar^2 \varepsilon_0 n^{1/3}} \sim \left(\frac{1}{n\lambda_F{}^3}\right)^{2/3} \sim \left(\frac{\hbar\omega_p}{E_F}\right)^2 \qquad (۲.۱۲)$$

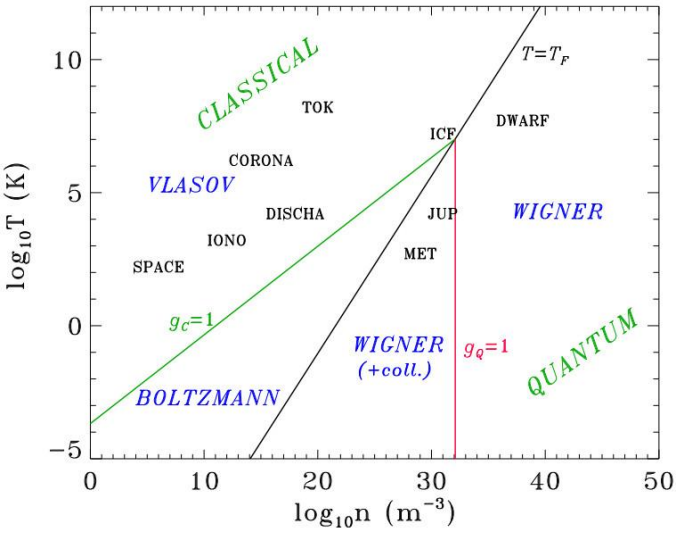
که در آن، برای وضوح بیشتر، ثابت‌های تناسب را حذف کرده‌ایم. عبارت سوم g_Q در معادله (2.12) کاملاً مشابه عبارت کلاسیک است، هنگامی که جایگزینی $\lambda_F \to \lambda_D$ صورت گیرد. عبارت آخر جالب‌تر است، زیرا هیچ معادل کلاسیکی ندارد: این عبارت، پارامتر کوپلینگ را به‌صورت نسبت انرژی پلاسمون $\hbar\omega_p$ (انرژی یک تحریک ابتدایی مرتبط با موج پلاسمای الکترونی) به انرژی فرمی تعریف می‌کند. رژیم بدون برخورد کوانتومی (که در آن، اثرات جمعی و میدان میانگین غالب هستند) مجدداً به عنوان رژیمی تعریف می‌شود که در آن پارامتر کوپلینگ کوانتومی کوچک است. از معادله‌ی (2.12)، به نظر می‌رسد که یک پلاسمای کوانتومی در چگالی‌های بزرگ‌تر، برخلاف پلاسمای کلاسیک، جمعی‌تر است (به معادله‌ی (2.4) مراجعه شود). این نتیجه ممکن است در نگاه نخست شگفت‌انگیز به نظر برسد، اما می‌توان آن را به‌سادگی با استناد به اصل طرد پائولی توضیح داد؛ اصلی که بیان می‌کند دو فرمیون نمی‌توانند حالت کوانتومی یکسانی را اشغال کنند. در یک گاز فرمیونی کاملاً تبهگن، تمام حالت‌های کم‌انرژی اشغال شده‌اند، بنابراین اگر ذره‌ی دیگری به گاز افزوده شود، ناگزیر در حالت پرانرژی قرار می‌گیرد. در نتیجه، با افزایش چگالی گاز، انرژی جنبشی متوسط نیز افزایش می‌یابد که مطابق با معادله‌ی (2.12)، مقدار g_Q را کاهش می‌دهد.

۳-۲ رژیم‌های پلاسما

تاکنون سه پارامتر بدون بعد تعریف کرده‌ایم که تعیین می‌کنند پلاسما کلاسیک است یا کوانتومی، و در هر دو حالت، آیا برخوردی است یا بدون برخورد:

- کلاسیک / کوانتومی $\chi = \frac{T}{T_F}$
- برخوردی / بدون برخورد (رژیم کلاسیک) g_C
- برخوردی / بدون برخورد (رژیم کوانتومی) g_Q

این پارامترها توابعی از دما و چگالی هستند. در شکل 1، خطوط مستقیم متناظر با $\chi = g_C = g_Q = 1$ بر روی نمودار $\log T - \log n$ رسم شده‌اند که رژیم‌های مختلف پلاسما را مشخص می‌کنند [۲۵].



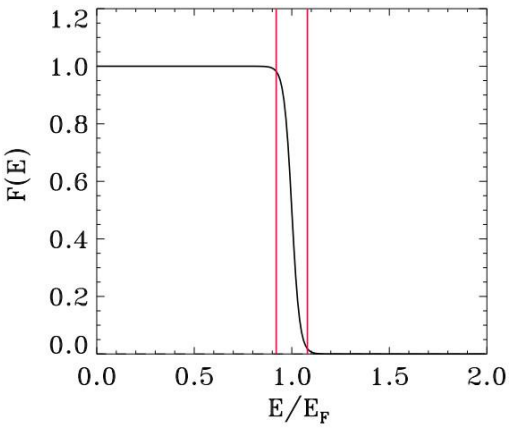
شکل ۱. نمودار پلاسما در صفحه log T - log n. IONO: پلاسمای یونوسفر؛ SPACE: فضای بین ستاره‌ای؛CORONA : تاج خورشیدی؛ DISCHA: تخلیه الکتریکی معمولی؛ TOK: آزمایش توکامک (همجوشی محصورسازی مغناطیسی)؛ ICF: همجوشی محصورسازی لختی؛ MET: فلزات و خوشه‌های فلزی؛ JUP: هسته مشتری؛ DWARF: ستاره کوتوله سفید.

صفحه $\log T - \log n$ به چهار ناحیه تقسیم می‌شود. دو ناحیه‌ی بالای خط $T = T_F$ کلاسیک هستند، در حالی که دو ناحیه‌ی دیگر در رژیم کوانتومی قرار می‌گیرند. هر یک از این نواحی کلاسیک یا کوانتومی، به نوبه‌ی خود، به دو زیرناحیه‌ی برخوردی و بدون برخورد تقسیم می‌شود که توسط معادلات جنبشی ویژه‌ی هر رژیم توصیف می‌گردند.

همان‌گونه که در بخش‌های بعد مرور خواهد شد، معادله‌ی ولاسوف و معادله‌ی ویگنر به‌ترتیب مدل‌های مناسبی برای پلاسماهای کلاسیک بدون برخورد و پلاسماهای کوانتومی بدون برخورد به شمار می‌روند. واژه‌ی بولتزمن به‌عنوان اصطلاحی عمومی برای معادلات جنبشی برخوردی در رژیم کلاسیک به کار می‌رود. اثرات برخوردی در رژیم کوانتومی به‌مراتب پیچیده‌تر هستند و در حال حاضر هیچ مدل جنبشی قابل اعتماد و مورد توافقی برای این رژیم وجود ندارد؛ این ناحیه در شکل با عبارت Wigner (+ coll.)مشخص شده است.

لازم به تأکید است که تمام مباحث پیشین، به‌طور ضمنی، تعادل حرارتی را فرض کرده‌اند. رژیم‌های خارج از تعادل باید

با دقت بیشتری بررسی شوند، زیرا نتایج پیشین ممکن است در چنین شرایطی کاملاً معتبر نباشند .برای مثال، اگر پرتوی الکترونی به پلاسما تزریق شود، سرعت پرتو باید در محاسبه‌ی طول موج دوبروی لحاظ گردد که در نتیجه مقدار آن کوچک‌تر خواهد شد. در چنین شرایطی، سامانه‌هایی که از تعادل دور هستند، گاهی می‌توانند با مدل‌های نیمه‌کلاسیکی توصیف شوند، حتی اگر تعادل متناظر هنوز ماهیتی کاملاً کوانتومی داشته باشد (به بخش ۴.۴ مراجعه شود). چندین نقطه‌ی متناظر با پلاسماهای طبیعی و آزمایشگاهی نیز در شکل 1 رسم شده‌اند. توجه داشته باشید که پلاسماهای فضایی و پلاسماهای همجوشی با محصورسازی مغناطیسی در ناحیه‌ی بدون برخورد کلاسیک قرار می‌گیرند. در مقابل، پلاسماهای همجوشی با محصورسازی لَختی ممکن است اثرات کوانتومی و یا کوپلینگ قوی را نشان دهند. اجرام اخترفیزیکی بسیار متراکم، مانند ستاره‌های کوتوله سفید، قطعاً کوانتومی و بدون برخورد هستند، حتی اگر دماهایی قابل مقایسه با پلاسماهای خورشیدی یا پلاسماهای همجوشی داغ داشته باشند.



شکل ۲. توزیع انرژی فرمی-دیراک برای حالتی $\frac{T}{T_F} = 0.1$ با . خطوط عمودی، پوسته‌ای با ضخامت K_BT را در اطراف سطح فرمی تعریف می‌کنند.

۳- الکترون‌ها در فلزات و نانوساختارهای فلزی

در فلزات معمولی، پارامتر جفت‌شدگی کوانتومی معمول بزرگ‌تر از واحد است. از این‌رو، در اصل، برخوردهای الکترون–الکترون به‌اندازه اثرات جمعی اهمیت دارند. اگر این وضعیت به‌طور کامل برقرار بود، می‌بایست مدل‌های بدون برخورد را کنار گذاشت و به مسئله‌ی کاملN جسمی پرداخت. خوشبختانه، پدیده‌ای که با عنوان انسداد پائولی شناخته می‌شود، در بیشتر موارد مورد توجه، نرخ برخورد را به‌طور چشمگیری کاهش می‌دهد. این وضعیت هنگامی رخ می‌دهد که توزیع الکترون‌ها در دماهای نسبتاً پایین، نزدیک به تعادل فرمی–دیراک باشد. نکته اساسی آن است که وقتی همه سطوح انرژی پایین‌تر اشغال شده باشند، اصل طرد پائولی تعداد زیادی از گذارهایی را که در غیر این صورت ممکن بودند، ممنوع می‌سازد [۲۴].به‌ویژه، در دمای صفر مطلق، تمام الکترون‌ها دارای انرژی‌هایی کمتر از E_F هستند و هیچ گذار الکترونی امکان‌پذیر نیست، زیرا هیچ حالت خالی در دسترس برای اشغال وجود ندارد. در دماهای متوسط، تنها الکترون‌های واقع در پوسته‌ای به ضخامت K_BT پیرامون سطح فرمی (ناحیه‌ای که $E_F = E$ است) می‌توانند با یکدیگر برخورد کنند؛ این پوسته در شکل 2 با دو خط عمودی نشان داده شده است. برای چنین الکترون‌هایی، نرخ برخورد الکترون–الکترون (برعکس طول عمر τ_{ee}) متناسب با $K_BT/\hbar$ است. این رابطه را می‌توان به‌عنوان برآوردی مبتنی بر اصل عدم‌قطعیت انرژی–زمان تفسیر کرد. نرخ برخورد متوسط با ضرب همین عبارت در کسری از الکترون‌های موجود در پوسته‌ای به ضخامت T پیرامون سطح فرمی، که تقریباً برابر $\frac{T}{T_F} \sim$ است، به دست می‌آید. در نتیجه، می‌توان نوشت:

$$v_{ee} = \frac{K_B T^2}{\hbar\, T_F} \qquad (۳.۱)$$

با استفاده از واحدهای نرمال‌شده، این رابطه به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{v_{ee}}{\omega_p} = \frac{E_F}{\hbar\omega_p}\left(\frac{T}{T_F}\right)^2 = \frac{1}{g_Q^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{T}{T_F}\right)^2 \qquad (۳.۲)$$

بنابراین، در ناحیه‌ای که $T < T_F$ و $1 < g_Q$ باشد (که مربوط به الکترون‌های فلزی است و در شکل ۱ نشان داده شده)، نابرابری $v_{ee} < \omega_p$ برقرار است. با بازگرداندن واحدهای ابعادی، مشاهده می‌کنیم که در دمای اتاق، $\tau_{ee} \simeq 10^{-10}$ ثانیه است. این زمان به‌طور قابل توجهی بزرگ‌تر از مقیاس زمانی معمول بدون برخورد، یعنی $\tau_p = \frac{2\pi}{\omega_p} \simeq 10^{-15}\mathrm{S} \simeq 1\mathrm{f}S$ است. علاوه بر این، مقیاس زمانی معمول برای برخوردهای الکترون-شبکه، یعنی $\tau_{ei} \simeq 10^{-14}\mathrm{S} \simeq 10\mathrm{f}S$، نیز بزرگ‌تر از τ_p است. در نتیجه، به نظر می‌رسد که یک رژیم بدون برخورد در مقیاسی در حدود فمتوثانیه برقرار باشد. با این حال، باید محتاط بود تا اثر انسداد پائولی بیش از حد تخمین زده نشود. ملاحظات فوق در حالت تعادل ترمودینامیکی معتبر هستند؛ در حالی که برای الکترون‌های خارج از تعادل، گذارهای بسیار بیشتری مجاز شمرده می‌شوند. بنابراین، در سیستم‌های به‌شدت برانگیخته که الکترون‌های غیرتعادلی فراوانی دارند، ممکن است فرکانس

برخورد بزرگ‌تر از تخمین ساده‌ای باشد که در معادله (۳.۲) ارائه شده است.

برخی از پارامترهای معمول برای الکترون‌های فلزی (طلا) در دمای اتاق در جدول ۱ خلاصه شده‌اند. توجه داشته باشید که τ_p، مقیاس زمانی معمول بدون برخورد، از مرتبه فمتوثانیه است. به همین دلیل، با توسعه منابع لیزری فوق سریع با دوره فمتوثانیه، امروزه امکان بررسی خواص میدان میانگین نانوساختارهای فلزی فراهم شده است. برای مثال، دینامیک الکترون در لایه‌های نازک طلا که توسط لیزرهای فمتوثانیه برانگیخته شده‌اند، در چندین پژوهش به‌صورت تجربی مطالعه شده است [۲، ۳]. همچنین اشاره می‌کنیم که λ_F، مقیاس طولی معمول بدون برخورد، از مرتبه آنگستروم است و با اندازه معمول اتمی قابل مقایسه می‌باشد [35-28].

جدول ۱. پارامترهای معمول برای الکترون‌ها در طلا در دمای اتاق.

n	5.9×10^{28} m^{-3}
T	300 K
ω_p	1.37×10^{16} s^{-1}
τ_p	0.46 fs
τ_{ie}	30 fs
T_F	6.4×10^4 K
E_F	5.53 eV
v_F	1.4×10^6 ms^{-1}
λ_F	1×10^{-10} m
g_Q	12.7
r_s/a_0	3

4-چهارچوب اساسی برای مسئله کوانتومی Nجسم

معادله شرودینگر است که تابع موج Nذره‌ای $\psi(x_1, x_2, \dots, x_N, t)$ را توصیف می‌کند. بدیهی است که حل این معادله، چه از طریق محاسبات تحلیلی و چه شبیه‌سازی‌های عددی، کاری غیرعملی (یا بسیار دشوار) است. با نادیده گرفتن همبستگی‌های دو-جسمی (و مرتبه‌های بالاتر)، می‌توان به یک ساده‌سازی شدید، اما مفید و تا حدودی قابل قبول دست یافت. این ساده‌سازی مستلزم این فرض است که تابع موج Nجسمی را می‌توان به صورت حاصلضرب Nتابع تک-جسمی فاکتورگیری کرد:

$$\psi(x_1, x_2, \dots, x_N, t) = \psi_1(x_1, t)\psi_2(x_2, t) \dots \psi_N(x_N, t) \quad (۴.۱)$$

برای فرمیون‌ها، اگر هیچ‌یک از توابع موج در سمت راست معادله (۴.۱) یکسان نباشند، یک شکل ضعیف از اصل طرد پائولی برقرار است. همانطور که پیش‌تر دیدیم، فرض همبستگی ضعیف بین ذرات زمانی برقرار است که پارامتر کوپلینگ کوانتومی (g_Q) کوچک باشد.

مجموعه Nتابع موج تک‌جسمی در این حالت، به عنوان مخلوط کوانتومی (یا حالت مختلط کوانتومی) شناخته شده و معمولاً توسط یک ماتریس چگالی نمایش داده می‌شود.

$$\rho(x, y, t) = \sum_{\alpha=1}^{N} p_\alpha \psi_\alpha(x, t)\psi_\alpha^*(y, t) \quad (۴.۲)$$

برای وضوح بیشتر، در اینجا فرض می‌کنیم که نرمال‌سازی یکسان $\int |\psi_\alpha|^2 dx = 1$ برای تمام توابع موج برقرار است و سپس احتمالات اشغال p_α معرفی می‌شوند. هر دو مدل ویگنر و هارتری که در ادامه توضیح داده می‌شوند، کاملاً با مدل‌های مبتنی بر فرمالیسم ماتریس چگالی (معادله فون نویمان) معادل هستند [33].

۴-۱ ویگنر-پواسون

نمایش ویگنر [26] ابزاری مفید برای بیان مکانیک کوانتومی در فرمالیسم فضای فاز است (برای بررسی‌ها به [27-29] مراجعه کنید). همانطور که در بالا توضیح داده شد، یک حالت مختلط کوانتومی عمومی را می‌توان با Nتابع موج تک‌ذره‌ای $\psi_\alpha(x, t)$ توصیف کرد که هر کدام با احتمال p_α مشخص می‌شوند؛ این احتمالات باید در شرط $\sum_{\alpha=1}^{N} p_\alpha = 1$ صدق کنند. تابع ویگنر، تابعی از متغیرهای فضای فاز (x, v) و زمان است که بر حسب توابع موج تک‌ذره‌ای به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$f(x, v, t) = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{m}{2\pi\hbar} p_\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_\alpha\left(x - \frac{\lambda}{2}, t\right)\psi_\alpha^*\left(x + \frac{\lambda}{2}, t\right) e^{\frac{imv\lambda}{\hbar}} d\lambda \quad (۴.۳)$$

اگرچه ما بحث خود را به موارد تک‌بعدی محدود می‌کنیم، اما تمام نتایج حاصله را می‌توان به راحتی به حالت سه‌بعدی تعمیم داد. باید تأکید شود که تابع ویگنر، علی‌رغم داشتن خواص مفید فراوان، یک چگالی احتمال حقیقی نیست، زیرا می‌تواند مقادیر منفی نیز اختیار کند. با این وجود، می‌توان از آن برای محاسبه میانگین‌ها، دقیقاً مشابه مکانیک آماری کلاسیک، استفاده نمود. به عنوان مثال، مقدار امید ریاضی برای یک کمیت عمومی $A(x, v)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\langle A \rangle = \frac{\iint f(x, v)A(x, v)dxdv}{\iint f(x, v)dxdv} \quad (۴.۴)$$

که مقدار صحیح مکانیک کوانتومی را به دست می‌دهد [14]. علاوه بر این، تابع ویگنر توزیع‌های حاشیه‌ای صحیح مکانیک کوانتومی، نظیر چگالی فضایی، را نیز بازتولید می‌کند:

$$n(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,v,t)dv=\sum_{\alpha=1}^{N} p_\alpha|\psi_\alpha|^2 \qquad (۴.۵)$$

همچنین اشاره می‌شود که البته، همه توابع متغیرهای فضای فاز، توابع ویگنر واقعی نیستند، زیرا لزوماً نمی‌توان آن‌ها را به شکل (۴.۳) بازنویسی کرد. به طور کلی، اگرچه تعیین تابع ویگنر با توجه به Nتابع موجی که مخلوط کوانتومی را تعریف می‌کنند، امری بدیهی است، اما عملیات معکوس آن عموماً امکان‌پذیر نیست. در واقع، هیچ قانون ساده‌ای برای تشخیص اینکه آیا یک تابع داده شده از x و v یک تابع ویگنر حقیقی است یا خیر، وجود ندارد. برای بحث دقیق‌تر در این زمینه و برخی راهنمایی‌های عملی برای ساخت توابع ویگنر حقیقی، به [۳۰] مراجعه شود. معادله تکامل تابع ویگنر، که از معادله فون‌نویمان به‌دست می‌آید، به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{\partial f}{\partial t}+v\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{em}{2i\pi\hbar^2}\iint d\lambda d\acute{v}\, e^{\frac{im(v-\acute{v})\lambda}{\hbar}}\left[\varphi\left(x+\frac{\lambda}{2}\right)-\varphi\left(x-\frac{\lambda}{2}\right)\right]f(x,\acute{v},t)=0 \qquad (۴.۶)$$

که در آن $\varphi(x,t)$ پتانسیل الکترواستاتیک خودسازگار است. با بسط جملهٔ انتگرالی در معادله (۴.۶) تا مرتبه $O(\hbar^2)$، نتیجه به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\partial f}{\partial t}+v\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{e}{m}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial v}=\frac{e\hbar^2}{24\mathrm{m}^3}\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^3}\frac{\partial^3 f}{\partial v^3}+O(\hbar^4) \qquad (۴.۷)$$

بنابراین، معادله‌ی ولاسوف در حد نیمه‌کلاسیکی ($\hbar\to 0$) بازیابی می‌شود. با این حال، تأکید می‌شود که به دست آوردن نتایج مجانبی دقیق دشوارتر بوده و عموماً شامل همگرایی ضعیف‌تری است. در این راستا، معادله‌ی ویگنر باید با معادله‌ی پواسون برای پتانسیل الکتریکی جفت شود.

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=\frac{e}{\varepsilon_0}\left(\int f dv-n_0\right) \qquad (۴.۸)$$

که در آن فرض شده است که یون‌ها یک پس‌زمینه‌ی خنثی‌کننده‌ی بی‌حرکت با چگالی یکنواخت n_0 تشکیل می‌دهند (این مدل در فیزیک حالت جامد به عنوان مدل ژلیوم شناخته می‌شود). سیستم ویگنر-پواسون (WP) حاصل به طور گسترده در مطالعه‌ی انتقال کوانتومی مورد استفاده قرار گرفته است [۱۶،۱۷،۳۱]. نتایج تحلیلی دقیق را می‌توان با خطی‌سازی معادلات (۴.۶) و (۴.۸) حول یک تعادل همگن فضایی که توسط $f_0(v)$ داده می‌شود، به دست آورد. با بیان مقادیر نوسانی به صورت مجموع امواج صفحه $\exp(ikx-i\omega t)$ با فرکانس ω و عدد موج k، رابطه‌ی پراکندگی را می‌توان به شکل $\varepsilon(\omega,k)=0$ نوشت، که در آن ثابت دی‌الکتریک ε برای سیستم WP به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\varepsilon_{WP}(\omega,k)=1+\frac{m\omega_p^2}{n_0 k}\int\frac{f_0\left(v+\frac{\hbar\mathrm{k}}{2m}\right)-f_0\left(v-\frac{\hbar\mathrm{k}}{2m}\right)}{\hbar\mathrm{k}(\omega-\mathrm{k}v)}dv \qquad (۴.۹)$$

با تغییر مناسب متغیر انتگرال‌گیری، می‌توان معادله‌ی (۴.۹) را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\varepsilon_{WP}(\omega,k)=1-\frac{\omega_p^2}{n_0}\int\frac{f_0(v)}{(\omega-\mathrm{k}v)^2-\hbar^2k^4/4m^2}dv \qquad (۴.۱۰)$$

از معادله‌ی (۴.۹)، می‌توان رابطه‌ی پراکندگی ولاسوف-پواسون (VP) را با اعمال حد نیمه‌کلاسیکی $\hbar\to 0$ بازیابی کرد.

$$\varepsilon_{VP}(\omega,k)=1+\frac{\omega_p^2}{n_0 k}\int\frac{\frac{\partial f_0}{\partial v}}{\omega-\mathrm{k}v}dv \qquad (۴.۱۱)$$

انتگرال‌گیری در معادلات (۴.۹) و (۴.۱۱) باید در امتداد کانتور لاندائو در صفحه مختلط (Re v,Im v) انجام شود، به‌طوری‌که تکینگی در $v=\frac{\omega}{\mathrm{k}}$ همیشه بالای کانتور باقی بماند [22]. این دستورالعمل به ما اجازه می‌دهد تا بخش موهومی صحیح $\varepsilon(\omega,k)$ را که اساس پدیده میرایی لاندائو است، به‌دست آوریم. به‌طوری مشابه مورد کلاسیک (ولاسوف-پواسون)، رابطه پراکندگی (۴.۹) نیز می‌تواند از راه‌حل‌های ناپایدار، یعنی راه‌حل‌هایی با بخش موهومی مثبت فرکانس، پشتیبانی کند. این راه‌حل‌ها به‌صورت نمایی رشد می‌کنند تا زمانی که برخی اثرات غیرخطی ظهور کنند و منجر به اشباع ناپایداری شوند. ویژگی پایداری رابطه پراکندگی سیستم

ویگنر-پواسون به‌طور گسترده در [32,33] مورد مطالعه قرار گرفته است.

4-2 هارتری

برای سیستم WP، یک رویکرد کاملاً معادل با استفاده مستقیم از Nتابع موج $\psi_\alpha(x,t)$ به‌دست می‌آید. این توابع از Nمعادله شرودینگر مستقل پیروی می‌کنند که از طریق معادله پواسون به هم متصل شده‌اند.

$$i\hbar\frac{\partial\psi_\alpha}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2\mathrm{m}}\frac{\partial^2\psi_\alpha}{\partial x^2}-e\varphi\psi_\alpha,\alpha=1,2,\dots,N \quad (۴.۱۲)$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=\frac{e}{\varepsilon_0}\left(\sum_{\alpha=1}^{N}p_\alpha|\psi_\alpha|^2-n_0\right) \quad (۴.۱۳)$$

این نوع مدل، در ابتدا توسط هارتری در زمینه فیزیک اتمی و با هدف مطالعه اثر خودسازگار الکترون‌های اتمی بر پتانسیل کولنی هسته، استخراج شد. متعاقباً، فوک اصلاحیه‌ای را ارائه داد که پاریته تابع موج Nذره را برای مجموعه‌ای از فرمیون‌ها در نظر می‌گیرد (مدل هارتری-فوک)؛ اما این توسعه در این مقاله بررسی نخواهد شد [۳۴–۳۵]. در عوض، مفید است که معادلات شرودینگر-پواسون فوق (۴.۱۲) تا (۴.۱۳) را به عنوان آنالوگ کوانتومی-مکانیکی مدل چندجریانی داوسون [۳۶] در نظر بگیریم. داوسون فرض کرد که تابع توزیع کلاسیک را می‌توان به‌صورت مجموع Nجریان نمایش داد که هر یک با احتمال p_α، چگالی n_α و سرعت u_α مشخص می‌شوند:

$$f(x,v,t)=\sum_{\alpha=1}^{N}p_\alpha n_\alpha(x,t)\delta(v-u_\alpha(x,t)) \quad (۴.۱۴)$$

که در آن δ نشان‌دهنده دلتای دیراک است. این جریان‌ها در واقع رشته‌های بی‌نهایت نازکی در فضای فاز محسوب می‌شوند. اگر تابع توزیع f از معادله ولاسوف پیروی کند، آنگاه توابع n_α و u_α هر کدام معادلات پیوستگی و بقای تکانه زیر را برآورده می‌کنند:

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t}+\frac{\partial(n_\alpha u_\alpha)}{\partial x}=0 \quad (۴.۱۵)$$

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial t}+u_\alpha\frac{\partial u_\alpha}{\partial x}=\frac{e}{m}\frac{\partial\varphi}{\partial x} \quad (۴.۱۶)$$

البته همراه با معادله پواسون با چگالی الکترون داده شده توسط $n(x,t)=\sum_{\alpha=1}^{N}p_\alpha-n_\alpha(x,t)$. توجه داشته باشید که نمایش (۴.۱۴) دارای برخی اشکالات است، زیرا توابع $u_\alpha(x,t)$ می‌توانند در طول تکامل زمانی چندمقداری شوند. این بدان معناست که سیستم (۴.۱۵)-(۴.۱۶) در موقعیت‌های خاصی دچار تکینگی‌هایی، از جمله چگالی بی‌نهایت، خواهد شد. هنگامی که این اتفاق رخ می‌دهد، توصیف سیال مبتنی بر (۴.۱۵)-(۴.۱۶) دیگر معتبر نخواهد بود، اگرچه تصویر فضای فاز جریان‌ها همچنان صحیح باقی می‌ماند. این خط استدلال را می‌توان با اعمال نمایش مادلونگ تابع موج به سیستم کوانتومی (۴.۱۲)-(۴.۱۳) تعمیم داد [37,38]. بیایید دامنه حقیقی $A_\alpha(x,t)$ و فاز حقیقی $S_\alpha(x,t)$ مربوط به حالت خالص ψ_α را طبق رابطه زیر معرفی کنیم:

$$\psi_\alpha=A_\alpha(x,t)\exp\left(\frac{iS_\alpha(x,t)}{\hbar}\right) \quad (۴.۱۷)$$

چگالی n_α و سرعت u_α هر جریان به صورت زیر داده می‌شوند.

$$n_\alpha(x,t)=|\psi_\alpha|^2={A_\alpha}^2,u_\alpha(x,t)=\frac{1}{m}\frac{\partial S_\alpha(x,t)}{\partial x} \quad (۴.۱۸)$$

با جایگذاری معادلات (۴.۱۷) تا (۴.۱۸) در معادلات (۴.۱۲) تا (۴.۱۳) و با جدا کردن بخش‌های حقیقی و موهومی معادلات، خواهیم داشت:

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t}+\frac{\partial(n_\alpha u_\alpha)}{\partial x}=0 \quad (۴.۱۹)$$

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial t}+u_\alpha\frac{\partial u_\alpha}{\partial x}=\frac{e}{m}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\hbar^2}{2\mathrm{m}^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2\sqrt{n_\alpha}}{\partial x^2\sqrt{n_\alpha}}\right) \quad (۴.۲۰)$$

اثرات کوانتومی در عبارت وابسته به $\hbar$ در رابطه‌ی (۴.۲۰) (که گاهی پتانسیل بوهم نامیده می‌شود) ظاهر می‌گردند. اگر $\hbar$ را برابر صفر در نظر بگیریم، به‌روشنی مدل چندجریانی کلاسیک روابط (۴.۱۵) تا (۴.۱۶) حاصل می‌شود. یکی از ویژگی‌های قابل‌توجه مدل چندجریانی کوانتومی این است که، برخلاف مدل کلاسیک متناظر خود، عموماً منجر به ایجاد تکینگی نمی‌شود. این ویژگی حاصل وجود پتانسیل بوهم است که با معرفی میزان مشخصی از پراکندگی موج، از افزایش نامحدود چگالی جلوگیری می‌کند. با خطی‌سازی معادلات (۴.۱۹) و (۴.۲۰) (همراه با معادله‌ی پواسون) حول تعادل

همگن فضایی $n_\alpha = n_0$، $u_\alpha = u_{0\alpha}$ و $\varphi = 0$، ثابت دی‌الکتریک زیر به‌دست می‌آید.

$$\varepsilon_H(\omega,k) = 1 - \sum_{\alpha=1}^{N} p_\alpha \frac{\omega_p^2}{(\omega - \mathrm{k}u_{0\alpha})^2 - \hbar^2 k^4/4m^2} \qquad (۴.۲۱)$$

رابطه‌ی چندجریانی کلاسیک به‌سادگی با قرار دادن $\hbar = 0$ در معادله‌ی (۴.۲۱) به‌دست می‌آید. هم‌ارزی مدل‌های ویگنر–پواسون و هارتری را می‌توان به‌راحتی با استفاده از رابطه‌ی پراکندگی خطی اثبات کرد. تعادل همگن شرح‌داده‌شده در بالا، به توابع موج مربوط است.

$$\psi_\alpha = \sqrt{n_0}\exp(i\frac{mu_{0\alpha}}{\hbar}x) \qquad (۴.۲۲)$$

تبدیل ویگنر (۴.۳) از توابع موج فوق (۴.۲۲) با عبارت زیر داده می‌شود:

$$f_0(v) = 1 - \sum_{\alpha=1}^{N} p_\alpha n_0\, \delta(v - u_{0\alpha}) \qquad (۴.۲۳)$$

که در آن δ نشان‌دهنده‌ی دلتای دیراک است. با قرار دادن رابطه‌ی (۴.۲۳) در رابطه‌ی پراکندگی WP ، یعنی معادله‌ی (۴.۹)، می‌توان دقیقاً رابطه‌ی پراکندگی چندجریانی (۴.۲۱) را بازیابی کرد.

۴-۳ مدل سیال

در فیزیک پلاسمای کلاسیک، مدل‌های سیال (یا هیدرودینامیک) معمولاً با در نظر گرفتن گشتاورهای معادله‌ی جنبشی مناسب (برای مثال، معادله‌ی ولاسوف) در فضای سرعت استخراج می‌شوند. گشتاور مرتبه‌ی s به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$M_s(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,v,t)v^s dv \qquad (۴.۲۴)$$

گشتاور مرتبه‌ی صفر، چگالی فضایی است ($n = M_0$) و از معادله‌ی پیوستگی پیروی می‌کند؛ گشتاور مرتبه‌ی اول، سرعت متوسط است ($nu = M_1$) و از معادله‌ی پایستگی تکانه پیروی می‌کند؛ گشتاور مرتبه‌ی دوم به فشار مربوط است ($P = \int_{-\infty}^{+\infty} f(v-u)^s dv$) و به همین ترتیب، این روند ادامه می‌یابد. این روش، تعداد نامحدودی از معادلات سیال را تولید می‌کند که معمولاً با فرض یک معادله‌ی بسته‌ی مناسب، در مرتبه‌ی نسبتاً پایینی کوتاه می‌شوند. این بسته‌شدگی اغلب به شکل یک معادله حالت ترمودینامیکی است که فشار را به چگالی مرتبط می‌کند؛ برای مثال، رابطه‌ی پلی‌تروپیک $P \propto n^\gamma$. همین روش را می‌توان برای معادله‌ی ویگنر نیز اعمال کرد، اگرچه برخی از مراحل استخراج، تا حدودی ظریف‌تر از حالت کلاسیک هستند. با استفاده از این تکنیک، معادلات سیال کوانتومی در [39] استخراج شدند. در این‌جا، یک استخراج مختصر از همان مدل سیال را با استفاده از رویکردی متفاوت بر اساس معادلات هارتری [۴۰–۴۱] ارائه خواهیم داد. نقطه‌ی شروع، دستگاه معادلات 2N (4.19)-(۴.۲۰) است که کاملاً معادل مدل هارتری (۴.۱۲)-(۴.۱۳) است. چگالی کلی $n(x,t)$ را تعریف می‌کنیم.

$$n(x,t) = \sum_{\alpha=1}^{N} p_\alpha n_\alpha \qquad (۴.۲۵)$$

و سرعت متوسط جهانی $u(x,t)$

$$\langle u_\alpha \rangle \equiv u(x,t) = \sum_{\alpha=1}^{N} p_\alpha \frac{n_\alpha}{n} u_\alpha \qquad (۴.۲۶)$$

با ضرب معادله‌ی پیوستگی (۴.۱۹) در p_α و جمع کردن روی $\alpha = 1,2,..,N$، به نتیجه‌ی زیر می‌رسیم:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial (nu)}{\partial x} = 0 \qquad (۴.۲۷)$$

به طور مشابه، برای معادله پایستگی تکانه (۴.۲۰)، به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} \\ &= \frac{e}{m}\frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ &+ \frac{\hbar^2}{2\mathrm{m}^2}\frac{\partial}{\partial x}\sum_{\alpha=1}^{N} p_\alpha \frac{n_\alpha}{n} u_\alpha \left(\frac{\partial_x{}^2(\sqrt{n_\alpha})/\partial x^2}{n_\alpha}\right) \\ &- \frac{1}{mn}\frac{\partial P}{\partial x} \end{aligned} \qquad (۴.۲۸)$$

که در آن فشار $P(x,t)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} P = mn\left[\frac{\sum p_\alpha n_\alpha u_\alpha{}^2}{n} - \frac{(\sum p_\alpha n_\alpha u_\alpha)^2}{n}\right] \\ \equiv mn(\langle u_\alpha{}^2\rangle \\ - \langle u_\alpha\rangle^2) \end{aligned} \qquad (۴.۲۹)$$

تا این مرحله، مشتق‌گیری دقیق است؛ اما (۴.۲۸) همچنان شامل مجموعی روی Nحالت است و بنابراین هیچ ساده‌سازی‌ای حاصل نشده است [42]. هدف ما دستیابی به یک دستگاه بسته از دو معادله برای کمیت‌های میانگین کلی

nو u است. برای بستن این دستگاه، دو تقریب لازم است: ۱ .فرض می‌کنیم یک معادله حالت کلاسیک، فشار را به چگالی مرتبط می‌سازد $P = P(n)$. ۲. فرض می‌کنیم جایگزینی زیر مجاز است:

$$P = \sum_{\alpha=1}^{N} p_\alpha \left(\frac{\partial_x{}^2(\sqrt{n_\alpha})/\partial x^2}{n_\alpha} \right) \Rightarrow \frac{\partial_x{}^2(\sqrt{n})/\partial x^2}{n} \quad (۴.۳۰)$$

می‌توان نشان داد که فرضیه‌ی دوم برای مقیاس‌های طولی بزرگ‌تر از λ_F برقرار است. این موضوع از نظریه‌ی خطی که در بخش ۵ به‌تفصیل شرح داده شده است، آشکار خواهد شد. با لحاظ کردن این فرضیات، دستگاه معادلات سیال کاهش‌یافته‌ی زیر را برای کمیت‌های کلی n و u به دست می‌آوریم.

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial (nu)}{\partial x} = 0 \quad (۴.۳۱)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{e}{m}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\hbar^2}{2\mathrm{m}^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial_x{}^2(\sqrt{n})/\partial x^2}{n}\right) - \frac{1}{mn}\frac{\partial P}{\partial x} \quad (۴.۳۲)$$

که در آن φ توسط معادله‌ی پواسون داده می‌شود. تأکید می‌شود که ما یک دستگاه معادلات 2N (از ۴.۱۹ تا ۴.۲۰) را به سیستمی متشکل از تنها دو معادله تبدیل کرده‌ایم. یک شکل جالب از دستگاه (۴.۳۱) تا (۴.۳۲) را می‌توان با معرفی تابع موج موثر زیر به دست آورد.

$$\psi_\alpha = \sqrt{n(x,t)}\exp(i\frac{S(x,t)}{\hbar}) \quad (۴.۳۳)$$

که در آن $S(x,t)$ طبق روابط $mu = \partial_x S$ و $n = |\psi|^2$ تعریف می‌شود. به‌آسانی می‌توان نشان داد که معادلات (۴.۳۱)–(۴.۳۲) معادل معادله‌ی غیرخطی شرودینگر زیر هستند:

$$i\hbar\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial_x{}^2\psi}{\partial x^2} - e\varphi\psi W_{eff}(|\psi|^2)\psi \quad (۴.۳۴)$$

$W_{eff}(n)$ پتانسیل مؤثری است که به فشار $P(n)$ مربوط می‌شود.

$$W_{eff}(n) = \int^n \frac{d\acute{n}}{\acute{n}}\frac{dP(\acute{n})}{d\acute{n}} \quad (۴.۳۵)$$

به‌عنوان مثال، گاز فرمیونی یک‌بعدی دمای صفر (D۱) را در نظر بگیرید که معادله‌ی حالت آن پلی‌تروپیک با توان $\gamma = 3$ است.

$$P = \frac{mv_F^2}{3n_0^2}n^3 \quad (۴.۳۶)$$

که در آن v_F سرعت فرمی محاسبه‌شده با چگالی تعادلی n_0 است. با استفاده از رابطه‌ی (۴.۳۶)، پتانسیل مؤثر به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$W_{eff}(n) = \frac{mv_F^2}{3n_0^2}|\Psi|^4 \quad (۴.۳۷)$$

این مدل سیال یک تقریب مفید است، زیرا پیچیدگی سیستم هارتری (با 2Nمعادله) یا معادله‌ی ویگنر (دینامیک فضای فاز) را به‌طرز چشمگیری کاهش می‌دهد. اعتبار آن محدود به سیستم‌هایی است که در مقایسه با λ_F بزرگ هستند. مانند همه‌ی تقریب‌های سیال، این تقریب پدیده‌های جنبشی معمول ناشی از جزئیات تابع توزیع فضای فاز را نادیده می‌گیرد. به‌طور خاص، نمی‌تواند میرایی بدون برخورد لاندائو را بازتولید کند [۴۶–۵۰].

۴-۴ ولاسوف–پواسون

رویکردهای ویگنر و هارتری هر دو جنبشی و کوانتومی هستند. مدل سیال یادشده با حذف اثرات جنبشی، در حالی‌که اثرات کوانتومی از طریق پتانسیل بوهم حفظ می‌شوند، به‌دست آمده است. تقریب ممکن دیگر می‌تواند شامل نادیده‌گرفتن اثرات کوانتومی در حالی‌که اثرات جنبشی حفظ می‌شوند، باشد. البته، حد نیمه‌کلاسیک حاصل توسط معادله‌ی ولاسوف بیان می‌شود.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{e}{m}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial v} = 0 \quad (۴.۳۸)$$

طبق معمول، این سامانه با معادله‌ی پواسون جفت شده است. سامانه‌ی ولاسوف–پواسون (VP) برای مطالعه‌ی دینامیک الکترون‌ها در خوشه‌های فلزی و لایه‌های نازک فلزی به‌کار رفته است [۴۲]. این سامانه برای انرژی‌های تحریک بزرگ مناسب است؛ زیرا در این حالت، طول موج دوبروی الکترون‌ها نسبتاً کوچک بوده و در نتیجه، اهمیت اثرات کوانتومی در دینامیک الکترونی کاهش می‌یابد. با این‌حال، همان‌طور که در بخش ۲.۲ دیدیم، توزیع تعادلی الکترون‌ها در فلزات به‌طور عمیق در ناحیه‌ی کوانتومی ($g_Q \geq 1$) قرار دارد؛ ازاین‌رو، اگرچه دینامیک توسط معادله ولاسوف توصیف می‌شود، شرط

اولیه باید توسط یک توزیع کوانتومی فرمی–دیراک تعیین گردد.

۴-۵ شرایط اولیه و مرزی

برای انجام شبیه‌سازی‌های عددی، شرایط اولیه و مرزی باید به‌طور دقیق مشخص شوند. از دیدگاه فیزیکی، شرط اولیه باید بازنمایانگر یک وضعیت تعادل ترمودینامیکی (حالت پایه) باشد. برای الکترون‌ها در فلزات، اغلب نتایج تحلیلی بر اساس سامانه‌ای نامتناهی به‌دست می‌آیند (که در فیزیک حالت جامد، توده نامیده می‌شود). در عمل، این حالت را می‌توان با درنظرگرفتن شرایط مرزی تناوبی با دوره‌ی مکانی L مدل کرد؛ هرچند این روش، یک کران پایین برای عدد موج یعنی $k_0 = \frac{2\pi}{L}$ معرفی می‌کند. برای چنین سامانه‌ی نامتناهی، حالت پایه را می‌توان به‌سادگی مشخص کرد. در مدل‌های WP و VP، هر تابعی از سرعت، یعنی فقط $f_0(v)$، یک حالت ایستا را تشکیل می‌دهد. به‌طور خاص، برای فرمیون‌ها، توزیع فرمی–دیراک در نظر گرفته می‌شود (بااین‌حال، برای بحث مربوط به توزیع فرمی–دیراک مناسب در مسائل یک‌بعدی، به بخش ۵.۲ مراجعه شود).

$$f_0(v) = const.\frac{1}{1+e^{\beta_e(\epsilon-\mu)}} \qquad (۴.۳۹)$$

که در آن $\beta_e = 1/K_BT$ و $\epsilon = mv^2/2$ انرژی تک‌ذره است (در اینجا، v اندازه‌ی سرعت ذره است؛ اگرچه تحلیل به‌صورت یک‌بعدی انجام می‌شود). ثابت نرمال‌سازی به‌گونه‌ای انتخاب می‌شود که $\int f_0 dv = n_0$، که در آن n_0 چگالی تعادل است؛ μ در حد $T \to 0$ برابر با انرژی فرمی E_F خواهد بود. همین حالت پایه را می‌توان برای مدل هارتری با انتخاب توابع موج اولیه به‌صورت (۴.۲۲) تعریف کرد. سپس، توزیع فرمی–دیراک با احتمالات $p_\alpha = 1/(1+e^{\beta_e(\epsilon_\alpha-\mu)})$، که در آن $\epsilon_\alpha = mu_{0\alpha}{}^2/2$، مشخص می‌شود. تقریب حجمی برای خوشه‌های فلزی و سایر نانوساختارهای فلزی – که اشیای کوچک و مجزایی هستند و یا در خلأ وجود دارند یا در یک ماتریس غیرفلزی پس‌زمینه جاسازی شده‌اند – ارتباطی ندارد. برای سیستم‌های کوانتومی باز (ویگنر یا هارتری)، انتخاب شرایط مرزی مناسب یک مسئله‌ی ظریف است که در اینجا به آن پرداخته نخواهد شد [۴۳]. برای سیستم VP نیمه‌کلاسیک، به‌عنوان مثال، می‌توان از مرزهای باز برای معادله‌ی ولاسوف (شار ورودی صفر) و از شرایط دیریکله برای معادله‌ی پواسون استفاده کرد. در مورد شرایط اولیه، حالت پایه برای سیستم VP با مرزهای باز به‌راحتی تعیین می‌شود. تفاوت اصلی آن با تعادل حجمی این است که برای یک سیستم باز، انرژی الکترواستاتیک از بین نمی‌رود و چگالی تعادل $n_0(x)$ وابسته به موقعیت می‌شود. از آنجا که هر تابعی از انرژی کل، یک جواب ثابت برای معادله‌ی ولاسوف است، حالت اولیه را به‌صورت توزیع فرمی–دیراک (۴.۳۹) با $\epsilon(x,v) = \frac{mv^2}{2} - e\varphi(x)$ تعریف می‌کنیم، که در آن φپتانسیل الکترواستاتیک هنوز تعیین‌نشده است. با جایگذاری این توزیع فرمی–دیراک در معادله‌ی پواسون، یک معادله‌ی غیرخطی به‌دست می‌آید که می‌توان آن را به‌صورت تکراری برای یافتن φ حل کرد؛ این φ به‌نوبه‌ی خود توزیع حالت پایه را نتیجه می‌دهد. در مقابل، جواب‌های ثابت معادلات ویگنر به‌سادگی توسط توابع انرژی تعیین نمی‌شوند، در نتیجه روش فوق قابل اعمال نیست. محاسبه‌ی حالت پایه بر حسب توابع موج هارتری ψ_α آسان‌تر است و پس از آن، محاسبه‌ی تابع وینگر مربوطه با (۴.۳) انجام می‌شود. چندین روش برای محاسبه‌ی توابع موج حالت پایه در فرمالیسم هارتری در منابع [۴۶–۴۴] موجود است و در اینجا مورد بحث قرار نمی‌گیرد.

۵-نظریه خطی

به‌منظور مقایسه‌ی مدل‌های مختلفی که در بخش ۴ شرح داده شده‌اند، به برخی از جزئیات نظریه‌ی خطی برای تعادل همگن دمای صفر با مرزهای تناوبی، چه در حالت تک‌بعدی و چه در حالت سه‌بعدی، خواهیم پرداخت. محاسبات دقیق‌تر در مورد نظریه‌ی خطی پلاسمای کوانتومی را می‌توان در منابع [۳۵،۴۸،۴۷]یافت.

۵-۱ تعادل فرمی–دیراک یک‌بعدی در دمای صفر

در یک بعد فضایی، توزیع فرمی–دیراک در $T = 0$ با $f_0(v) = n_0/2v_F$ داده می‌شود اگر $v_F \geq |v|$ باشد و $f_0(v) = 0$ اگر $v_F < |v|$ باشد. سرعت فرمی در یک بعد برابر است با:

$$v_F = \frac{\pi}{2}\frac{\hbar n_0}{m} \qquad (۵.۱)$$

به‌طوری‌که نرمال‌سازی توزیع شرط $\int f_0 dv = n_0$ را ارضا می‌کند. این توزیع با توزیع موسوم به کیسه آب، که به‌طور گسترده در فیزیک پلاسمای کلاسیک مورد استفاده قرار گرفته است، یکسان می‌باشد [48,49]. با استفاده از ثابت دی‌الکتریک خطی ویگنر (رابطه ۴.۱۰) و با بسط نتایج

برحسب توان‌های k و $\hbar$، رابطه‌ی پراکندگی زیر به‌دست می‌آید (جزئیات در [۳۹] آمده است).

$$\omega^2 = {\omega_p}^2 + k^2{v_F}^2 + \frac{\hbar^2k^4}{4m^2} + \frac{\hbar^2k^6\lambda_F^2}{3m^2} + O(\hbar^4, k^{12}) \quad (۵.۲)$$

با به‌کارگیری ثابت دی‌الکتریک ولاسوف، رابطه‌ی پراکندگی برای همان تعادل به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\omega^2 = {\omega_p}^2 + k^2{v_F}^2 \quad (۵.۳)$$

توجه داشته باشید که رابطه‌ی پراکندگی ولاسوف ذکرشده در بالا، دقیق است؛ یعنی هیچ جمله‌ای با مرتبه‌ی k^4 یا بالاتر در آن وجود ندارد. همچنین لازم به ذکر است که برای این تعادل یک‌بعدی، بخش موهومی ثابت دی‌الکتریک به‌طور کامل صفر می‌شود و در نتیجه، میرایی لاندائو مشاهده نمی‌شود. اکنون، قصد داریم نتیجه‌ی فوق (۵.۲)، که از مدل دقیق ویگنر-پواسون به‌دست آمده است، با نتیجه‌ی معادل حاصل از مدل سیال که در بخش ۴.۳ بسط داده شد، مقایسه کنیم. برای این منظور، معادلات سیال (۴.۳۱)-(۴.۳۲) را در مورد یک گاز فرمیونی یک‌بعدی در دمای صفر در نظر می‌گیریم که فشار آن توسط رابطه (۴.۳۶) داده شده است. با خطی‌سازی حول تعادل همگن $n = n_0, u = \varphi = 0$، رابطه‌ی پراکندگی زیر به‌دست می‌آید (در اینجا از هیچ تقریب دیگری استفاده نشده است):

$$\omega^2 = {\omega_p}^2 + k^2{v_F}^2 + \frac{\hbar^2k^4}{4m^2} \quad (۵.۴)$$

می‌بینیم که روابط پراکندگی سیال (۵.۴) و ویگنر (۵.۲) تا مرتبه‌ی k^4 بر یکدیگر منطبق هستند. این امر حدس ما را تأیید می‌کند که مدل سیال، تقریب خوبی از مدل WP (یا هارتری) در محدوده‌ی طول موج‌های بلند است.

۵.۲. تعادل فرمی-دیراک سه‌بعدی دمای صفر

از دیدگاه فیزیکی، می‌توان سیستم‌هایی واقعی را تصور کرد که رفتار مؤثر یک‌بعدی از خود نشان می‌دهند. نمونه‌ی بارز چنین سیستمی یک فیلم فلزی نازک است که در آن ابعاد موازی با سطح فیلم بسیار بزرگ‌تر از ضخامت آن هستند. در این حالت، دینامیک جمعی الکترون‌ها را می‌توان با مدلی یک‌بعدی توصیف کرد که تنها به مختصه‌ی x (عمود بر سطح فیلم) وابسته است. با این حال، حتی در چنین هندسه‌ای، توزیع تعادلی الکترون‌ها یک‌بعدی نیست. در حالت پایه (دمای صفر)، الکترون‌ها تمام حالت‌های کوانتومی را تا سطح فرمی اشغال می‌کنند، به‌طوری‌که شرط $v_F \geq |v|$ کره‌ی فرمی را در فضای سرعت تعریف می‌کند. در این شرایط، هیچ دلیلی وجود ندارد که حالت‌هایی با $v_y \neq 0$ و $v_z \neq 0$ در دسترس نباشند؛ در واقع، این حالت‌ها نیز اشغال شده‌اند. بنابراین، توزیع تعادلی همواره سه‌بعدی است، حتی در هندسه‌ی یک‌بعدی بی‌نهایت صفحه‌ای:

$$f_0^{3D}(v) = \frac{n_0}{\frac{4}{3}\pi v_F^2}, For \quad v_F \geq |v| \quad (۵.۵)$$
$$and \;\; f_0^{3D}(v) = 0, for \quad v_F < |v|$$

که به‌گونه‌ای نرمال‌سازی شده است که $\int f_0^{3D}(v)d^3v = n_0$ با این وجود، می‌توان هندسه‌ی یک‌بعدی را برای معادلات ولاسوف و پواسون حفظ کرد، به شرط آن‌که توزیع تعادلی اولیه از تصویر توزیع فرمی–دیراک سه‌بعدی روی محور v_x به‌دست آید: $f_0^{1D}(v_x) = \iint f_0^{3D}dv_ydv_z$. در این صورت، با نوشتن $v_x \equiv v$، توزیع کاهش‌یافته‌ی زیر حاصل می‌شود:

$$f_0^{1D}(v) = \frac{3}{4}\frac{n_0}{v_F}\left(1 - \frac{v^2}{v_F^2}\right), \quad v_F \geq |v| \quad (۵.۶)$$
$$f_0^{1D}(v) = 0, \quad v_F < |v|$$

این رویکرد ساختگی نیست؛ زیرا انتشار موج خطی در پلاسمای بدون برخورد ذاتاً پدیده‌ای یک‌بعدی است و شامل امواج صفحه‌ای می‌شود که در امتداد جهتی مشخص منتشر می‌شوند. در استخراج روابط پراکندگی از معادلات سه‌بعدی ولاسوف–پواسون، ابتدا بر مؤلفه‌های سرعت عمود بر جهت انتشار موج انتگرال گرفته می‌شود؛ بنابراین، توزیع کاهش‌یافته‌ای مانند (۵.۶) به‌طور طبیعی در روابط پراکندگی یک‌بعدی ظاهر می‌شود. این استدلال زمانی دیگر معتبر نخواهد بود که اثرهای غیرخطی اهمیت پیدا کنند، زیرا در آن حالت ممکن است پدیده‌هایی ذاتاً سه‌بعدی پدید آیند. برخوردها نیز سهمی ذاتاً سه‌بعدی دارند. اکنون، رابطه‌ی (۵.۶) را در معادلات (۴.۱۰) یا (۴.۱۱) قرار می‌دهیم و روابط پراکندگی را برای سیستم‌های WP و VP که توسعه‌ی آن‌ها بر حسب توان‌های k انجام شده است، محاسبه می‌کنیم .برای توزیع تعادل (۵.۶)، ثابت دی‌الکتریک دارای بخشی موهومی است؛ از این‌رو، در اصل نوعی میرایی بدون برخورد با این تعادل مرتبط است. با این حال، در حال حاضر از آن صرف‌نظر کرده و بر بخش حقیقی $\varepsilon(\omega, k)$ تمرکز می‌کنیم. همچنین، ترتیب زیر را فرض می‌کنیم:

$$\frac{\hbar \mathrm{k}}{\mathrm{m}} \ll v_F \ll \frac{\omega}{k} \quad (۵.۷)$$

این تقریب برای طول‌موج‌های بلند معتبر است. توجه داشته باشید که نامساوی دوم در رابطه‌ی (۵.۷) بدین معناست که سرعت فاز موج باید بزرگ‌تر از سرعت فرمی باشد. با در نظر گرفتن این فرض، رابطه‌ی پراکندگی تا مرتبه‌ی چهارم در k به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\omega^2 = {\omega_p}^2 + \frac{3}{5}k^2{v_F}^2 + \frac{\hbar^2k^4}{4m^2} \qquad (۵.۸)$$

اکنون، با فرض معادله‌ی حالت به‌صورت زیر، رابطه‌ی پراکندگی مربوط به مدل سیال کوانتومی (۴.۳۱)–(۴.۳۲) را استخراج می‌کنیم:

$$\frac{P}{P_0} = (\frac{n}{n_0})^\gamma \qquad (۵.۹)$$

که در آن P_0 و n_0 به ترتیب فشار و چگالی تعادلی هستند؛ در نتیجه داریم:

$$\omega^2 = {\omega_p}^2 + \gamma k^2{v_0}^2 + \frac{\hbar^2k^4}{4m^2} \qquad (۵.۱۰)$$

که در آن ${v_0}^2 = P_0/(mn_0)$. توجه داریم که رابطه‌ی پراکندگی سیال یک‌بعدی (۵.۴)، هنگامی که $\gamma = 3$ و $P_0 = mn_0{v_F}^2/3$ باشد (همانطور که از (۴.۳۶) قابل استنتاج است)، به‌درستی بازیابی می‌شود. حال، در حالت سه بعدی، فشار یک گاز الکترون کوانتومی در تعادل حرارتی و دمای صفر را می‌توان به‌صورت [۲۳] بیان کرد:

$$P_0 = \frac{2}{5}n_0E_F \qquad (۵.۱۱)$$

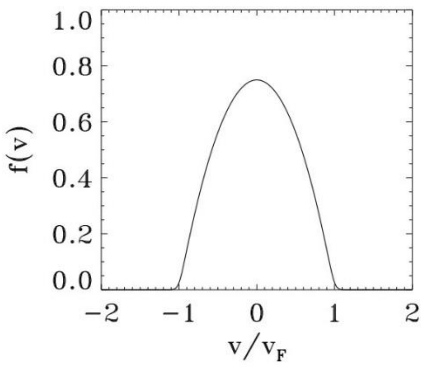
(که در آن E_F در حالت تعادل محاسبه می‌شود)، به‌طوری که ${v_0}^2 = {v_F}^2/5$ و (۵.۱۰) برقرار است.

$$\omega^2 = {\omega_p}^2 + \frac{\gamma}{5}k^2{v_0}^2 + \frac{\hbar^2k^4}{4m^2} \qquad (۵.۱۲)$$

ممکن است تصور شود که توان صحیح برای استفاده در معادله حالت (۵.۹) برابر با $\gamma = (D+2)/2$ است که در سه بعد، $3/5$ را نتیجه می‌دهد. با این حال، با این انتخاب، رابطه‌ی پراکندگی سیال (۵.۱۲) با نتیجه‌ی WP (5.8) متفاوت خواهد بود. نتیجه‌ی صحیح، با در نظر گرفت $\gamma = 3$ (درست مانند حالت یک‌بعدی)، به دست می‌آید. چرا این‌طور است؟ دلیل آن، همانطور که قبلاً ذکر شد، این است که انتشار موج خطی اساساً یک پدیده‌ی یک‌بعدی است، زیرا شامل انتشار در امتداد یک جهت واحد، بدون هیچ‌گونه تبادل انرژی در دو جهت دیگر است. جزئیات دینامیک خطی اساساً توسط معادله‌ی حالت تعیین می‌شوند، که بنابراین باید توان یک‌بعدی را نشان دهد. در مقابل، تعادل واقعاً سه‌بعدی است (زیرا توزیع فرمی-دیراک سه‌بعدی در جهت x تصویر شده است). بنابراین، فشار تعادل باید در واقع توسط عبارت سه‌بعدی آن (۵.۱۱) داده شود [43].

۵.۳. راه‌حل‌های دمای محدود: میرایی لاندائو

تاکنون، ما این واقعیت را که لاندائو در سال ۱۹۴۰ [50] کشف کرد، کاملاً نادیده گرفته‌ایم که امواج الکترواستاتیک حتی در غیاب هرگونه برخوردی می‌توانند به‌صورت نمایی میرایی شوند. نظریه‌ی دقیق میرایی لاندائو را می‌توان در اکثر کتاب‌های درسی فیزیک پلاسما یافت. در اینجا، فقط به خواننده یادآوری می‌کنیم که میرایی از تکینگی ظاهر شده در روابط پراکندگی (۴.۹) و (۴.۱۱) در نقطه‌ی $v = \omega/k$ در فضای سرعت ناشی می‌شود.



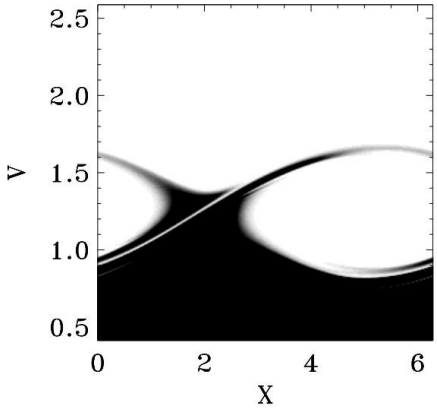
شکل ۳. توزیع سرعت فرمی-دیراک که در یک جهت سرعت واحد (با فرض $\frac{T}{T_0} = 0.05$) پیش‌بینی شده است.

این امر مربوط به ذراتی است که سرعتشان برابر با سرعت فاز موج (ω/k)، یعنی ذرات تشدیدی (Resonance Particles)، باشد. لاندائو نشان داد که روش صحیح برای انجام انتگرال در رابطه‌ی پراکندگی، صرفاً گرفتن مقدار اصلی (که تنها بخش حقیقی فرکانس را به دست می‌دهد) نیست، بلکه انتگرال‌گیری در صفحه‌ی مختلط v است، به‌گونه‌ای که کانتوری دنبال شود که تکینگی را همواره در یک طرف قرار

دهد. با این تجویز، تابع دی‌الکتریک دارای یک بخش موهومی خواهد بود که به‌نوبه‌ی خود، نرخ میرایی γ_L را برای موج ایجاد می‌کند. این استدلال که در ابتدا برای سیستم VP توسعه داده شده بود، همچنان برای حالت کوانتومی WP نیز صادق است، اگرچه مقدار عددی نرخ میرایی البته به $\hbar$ بستگی دارد. در دمای صفر، هیچ ذره‌ای با سرعت $v > v_F$ وجود ندارد. بنابراین، امواجی با سرعت فاز بزرگ‌تر از v_F به هیچ وجه میرا نمی‌شوند. برای این امواج، داریم $\omega/v_F > k$ از آنجایی که بخش حقیقی فرکانس تقریباً برابر با فرکانس پلاسما است، این بدان معناست که امواجی که $k\lambda_F < 1$ هستند، میرا نمی‌شوند. اینها امواجی با طول موج کوچک‌تر از $\lambda_F \equiv v_F/\omega_{pe}$ هستند که برای الکترون‌های فلزی مرتبه‌ای در حدود آنگستروم دارد (به جدول ۱ مراجعه شود). در دمای محدود، توزیع فرمی-دیراک پیش‌بینی‌شده‌ی (۵.۶) (شکل ۳ را ببینید) به تمامی سرعت‌ها تعمیم می‌یابد (اگرچه شدت آن با افزایش سرعت کاهش می‌یابد)، به‌طوری که مقداری میرایی برای همه‌ی اعداد موج وجود دارد. نرخ میرایی خطی را می‌توان از رابطه‌ی پراکندگی محاسبه کرد؛ برای مثال، به [51] مراجعه شود، و ما در اینجا بیشتر از این به این موضوع نمی‌پردازیم. جالب‌تر آن است که به دنبال حدس کیفی در مورد فاز غیرخطی پس از میرایی اولیه‌ی لاندائو [52] باشیم. به‌طور کلاسیک، میرایی لاندائو تا زمان‌هایی در حدود زمان جهش (τ_b) ادامه می‌یابد و پس از آن، تکامل ذاتاً غیرخطی است. زمان جهش به دامنه‌ی اختلال اولیه در توزیع تعادل وابسته است.

$$f(x,v,t=0^+) = f_0(v)(1+\alpha\cos\ kx) \qquad (۵.۱۳)$$

اختلال چگالی نرمال‌شده $\alpha = \tilde{n}/n_0$ و عدد موج اختلال k، در نظر گرفته می‌شوند. زمان جهش (τ_b) از رابطه $\omega_p\tau_b = \alpha^{-1/2}$ به دست می‌آید. زمانی که دامنه اختلال به اندازه کافی بزرگ باشد، مشاهده می‌شود که میرایی لاندائو پس از گذشت زمانی در حدود τ_b متوقف می‌شود. این توقف به این دلیل اتفاق می‌افتد که ذرات رزونانس (ذراتی که سرعتشان نزدیک به سرعت فاز موج است) در داخل موج به دام می‌افتند و گردابه‌های خودپایدار در فضای فاز تشکیل می‌دهند. این گردابه‌ها میدان الکتریکی را در یک محدوده محدود (اگرچه غالباً کوچک) حفظ می‌کنند.



شکل ۴. تصویری از فضای فاز کلاسیک تابع توزیع الکترون در ناحیه اطراف سرعت فاز موج. موقعیت بر حسب λ_F و سرعت بر حسب v_F نرمال‌سازی شده‌اند. پارامترهای شبیه‌سازی عبارتند از: $T = 0.01T_F$، $\alpha = 0.1$ و $k\lambda_F = 1$.

ما شبیه‌سازی‌های عددی سیستم VP را با استفاده از کد ولاسوف اویلری [53,54] انجام دادیم. تعادل اولیه با استفاده از توزیع فرمی-دیراک پیش‌بینی‌شده در دمای محدود تعیین می‌شود.

$$f_{e0}(x,v_x) = \frac{3}{4}\frac{n_0}{v_F}\frac{T}{T_F}\ln\left[1+\exp\left(\frac{\frac{1}{2}mv^2-\mu}{k_BT}\right)\right] \qquad (۵.۱۴)$$

توزیع تعادلی (۵.۱۴) تعمیم دمای محدود توزیع فرمی–دیراک کاهش‌یافته (۵.۶) است و در حد $T = 0$ به آن فرو می‌کاهد. دمای تعادل $T = 0.01T_F$ در نظر گرفته شد، در حالی که اختلال (معادله ۵.۱۳) با دامنه $\alpha = 0.1$ و عدد موج $k\lambda_F = 1$ مشخص می‌شود. تصاویر فضای فاز توزیع الکترون (شکل ۴)، همان‌طور که انتظار می‌رفت، تشکیل یک گرداب را نشان می‌دهند که با سرعتی نزدیک به ω/k حرکت می‌کند. علاوه بر این، می‌توان به سادگی ثابت کرد که امتداد گرداب در فضای سرعت (δv) به صورت زیر با دامنه و عدد موج اختلال مرتبط است:

$$\delta v = \frac{\omega_p}{k}\alpha^{1/2} \qquad (۵.۱۵)$$

اکنون به حالت کاملاً کوانتومی می‌پردازیم که توسط سیستم ویگنر-پواسون با همان شرایط اولیه (معادله ۵.۱۳) توصیف می‌شود. شبیه‌سازی‌ها با استفاده از کد شرح داده شده در مرجع [51] انجام شدند. از آنجایی که طول موج اختلال $2\pi/k$ است، گرداب فضای فاز کلاسیک ناحیه‌ای به مرتبه $\delta v/k$ در فضای فاز را تعریف می‌کند. اگر این ناحیه کوچک‌تر از $\hbar/m$ باشد، مکانیک کوانتومی تشکیل و تداوم

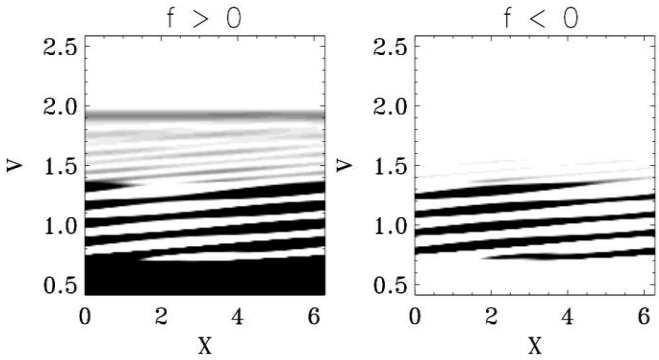
چنین ساختاری را ممنوع می‌کند [51]. با استفاده از رابطه (۵.۱۵)، در نتیجه متوجه می‌شویم که گرداب فضای فاز باید زمانی توسط اثرات کوانتومی سرکوب شود که

$$\frac{\hbar k}{m} \gtrsim \frac{\omega_p}{k}\alpha^{1/2} \qquad (۵.۱۶)$$

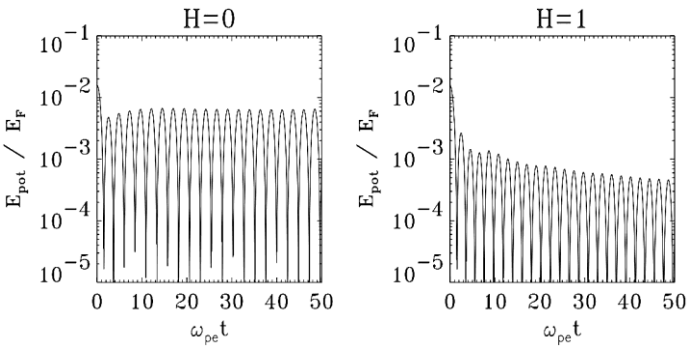
با استفاده از واحدهای نرمال‌شده، رابطه فوق به صورت زیر بیان می‌شود:

$$Hk^2\lambda_F^2 \gtrsim \alpha^{1/2} \qquad (۵.۱۷)$$

که در آن $H = \omega_p/E_F$ است. روابط (۵.۱۵)–(۵.۱۷) تخمین‌های مرتبه‌ی بزرگی هستند که معیار فیزیکی لازم برای تشکیل و پایداری گردابه‌های فضای فاز را در حضور اثرات کوانتومی مشخص می‌کنند. از آنجا که اثرات کوانتومی مانع از به دام افتادن ذرات در برخورد با موج می‌شوند، انتظار داریم میرایی لاندائو حتی برای زمان‌های بزرگ‌تر از زمان جهش نیز ادامه پیدا کند.



شکل ۵. نمایی از فضای فاز کوانتومی تابع ویگنر الکترون در ناحیه‌ی مجاور سرعت فاز موج ارائه شده است. مختصات مکانی بر حسب λ_F و سرعت بر حسب v_Fنرمال‌سازی شده‌اند. پارامترها مطابق شکل ۴ بوده و مقدار $H = 1$ نیز افزوده شده است. در چارچوب چپ، مؤلفه‌ی مثبت $f(x,v)$ و در چارچوب راست، مؤلفه‌ی منفی آن نشان داده شده‌اند.



شکل ۶. تغییرات زمانی انرژی پتانسیل، که نسبت به انرژی فرمی نرمال‌سازی شده است، برای حالت کلاسیک (در چارچوب چپ) و حالت کوانتومی با $H = 1$ (در چارچوب راست) نمایش داده شده است.

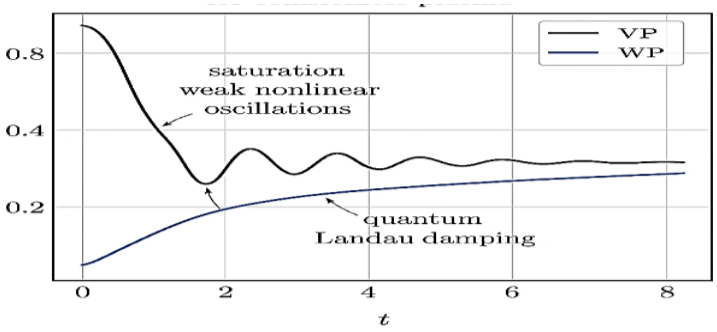
از نظر فیزیکی، اثر یادشده به پدیده‌ی تونل‌زنی کوانتومی مربوط است. ذراتی که در موج به دام افتاده‌اند، با وجود آنکه انرژی‌شان کمتر از انرژی چاه پتانسیل موج است، احتمال مشخصی برای خروج از تله دارند. با این حال، می‌توان این اثر را از دیدگاه دیگری نیز تصویر کرد. به‌این‌صورت که اگر چاه پتانسیل بسیار کم‌عمق باشد (یعنی برای مقادیر کوچک α)، هیچ حالت مقید کوانتومی نمی‌تواند درون آن شکل گیرد. برای آزمون تقریب‌های مرتبه‌ی بزرگی فوق، همان شبیه‌سازی شکل 4 را با استفاده از معادله‌ی ویگنر به‌جای معادله‌ی ولاسوف اجرا کرده‌ایم. در این محاسبات مقدار $H = 1$ در نظر گرفته شده است، به‌گونه‌ای که نابرابری (۵.۱۷) برقرار باشد. تصاویر فضای فاز (شکل ۵) نشان می‌دهند که در این حالت هیچ ساختار گردابی پدیدار نمی‌شود. همچنین، نواحی گسترده‌ای از فضای فاز دیده می‌شود که در آن‌ها تابع توزیع ویگنر دارای مقدارهای منفی است. با مقایسه‌ی تکامل کلاسیک و کوانتومی انرژی پتانسیل (شکل 6) ملاحظه می‌شود که در طول مدت قابل‌توجهی، میدان الکتریکی در تکامل کوانتومی به‌مراتب کوچک‌تر است. این نتایج نشان می‌دهد که مدل‌های نیمه‌کلاسیکی دینامیک الکترون‌های فلزی ممکن است میزان میرایی لاندائو را کمتر از مقدار واقعی برآورد کنند[۵۵].

به‌طور خلاصه، نتایج این بخش نشان می‌دهند که اگرچه میرایی لاندائو در رژیم خطی را می‌توان در هر دو چارچوب کلاسیک و کوانتومی توصیف کرد، اما دینامیک غیرخطی پس از زمان جهش، نقطه‌ای کلیدی برای تمایز میان این دو توصیف فراهم می‌سازد. در حالی‌که در مدل کلاسیک ولاسوف–پواسون، به دام افتادن ذرات رزونانسی و تشکیل گردابه‌های پایدار فضای فاز منجر به توقف میرایی و بقای میدان الکتریکی می‌شود، اثرات غیرموضعی و تداخلی کوانتومی در چارچوب ویگنر–پواسون از تشکیل و پایداری چنین ساختارهایی جلوگیری می‌کنند و در نتیجه، میرایی لاندائو حتی در زمان‌های بزرگ‌تر از زمان جهش نیز ادامه می‌یابد. معیارهای مرتبه‌ی بزرگی به‌دست‌آمده در این بخش، به‌ویژه روابط (۵.۱۶) و (۵.۱۷)، چارچوبی فیزیکی و شفاف برای تشخیص حدود اعتبار توصیف‌های کلاسیک، نیمه‌کلاسیکی و کوانتومی فراهم می‌کنند و نشان می‌دهند که مدل‌های نیمه‌کلاسیکی سیال ممکن است به‌طور سیستماتیک میزان میرایی واقعی را کم‌برآورد کنند. از این منظر، نتایج حاضر نه‌تنها یک مقایسه‌ی صوری میان مدل‌ها

نیست، بلکه ابزار تحلیلی روشنی برای تفسیر دینامیک غیرخطی پلاسماهای کوانتومی بدون برخورد، به‌ویژه در سامانه‌های متراکم نظیر فلزات و نانوپلاسماها، ارائه می‌دهد [56-58].

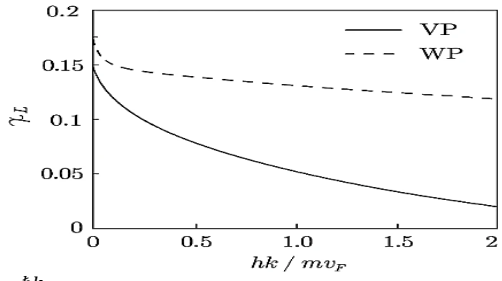
۵.۴. تحلیل کمی میرایی غیرخطی لاندائو و دینامیک فضای فاز

به دلیل ضرورت بررسی رژیم غیرخطی فراتر از پاسخ خطی، سامانه‌های ولاسوف–پواسون (VP) و ویگنر–پواسون (WP) به‌صورت عددی و با شرایط اولیه‌ی یکسان (پارامترهای موج و دامنه‌ی اختلال یکسان) حل شده‌اند تا مقایسه‌ای مستقیم و کمی بین توصیف کلاسیک و کوانتومی، و نیز بین رژیم خطی و غیرخطی فراهم شود. شکل ۷ تکامل زمانی دامنه‌ی میدان الکتریکی $|E_k(t)|$ را برای هر دو مدل نشان می‌دهد. در مرحله‌ی خطی، هر دو سامانه میرایی لاندائو را نمایش می‌دهند؛ اما با ورود به رژیم غیرخطی، دینامیک کلاسیک VP از پیش‌بینی خطی فاصله می‌گیرد: میرایی اشباع می‌شود و رفتار نوسانی مرتبط با به‌دام‌افتادن ذرات (trapping) ظاهر می‌گردد. در مقابل، در مدل WP میرایی برای زمان طولانی‌تری یکنواخت‌تر ادامه یافته و اشباع غیرخطی به‌طور محسوسی سرکوب می‌شود.



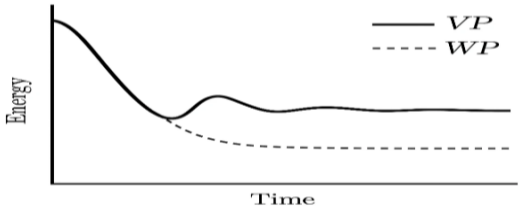
شکل ۷. تکامل زمانی دامنه میدان الکتریکی $|E_k(t)|$ در پلاسمای بی‌برخورد برای مدل‌های ولاسوف–پواسون (VP) و ویگنر–پواسون (WP). در مدل VP، میرایی اولیه به اشباع غیرخطی منجر شده در حالی‌که در مدل WP، میرایی به‌صورت یکنواخت‌تر ادامه یافته است.

برای کمی‌سازی این تفاوت، نرخ میرایی مؤثر γ_L از پوش زمانی میدان (envelope) استخراج شده و در شکل ۸ ارائه گردیده است. در سامانه‌ی VP، با تشدید اثر trapping، نرخ میرایی مؤثر کاهش می‌یابد؛ در حالی که در مدل WP نرخ میرایی بالاتر و پایدارتر باقی می‌ماند. این اختلاف به‌ویژه زمانی پررنگ می‌شود که مقیاس کوانتومی با مقیاس‌های تشدید موج–ذره قابل مقایسه گردد، به‌گونه‌ای که $\frac{\hbar k}{m} \gtrsim \frac{\omega_p}{k}\alpha^{1/2}$ که بیانگر نقش پاشندگی/تداخل کوانتومی در تغییر دینامیک تشدیدی و جلوگیری از اشباع کلاسیک است.



شکل 8. نرخ میرایی لاندائو γ_L بر حسب پارامتر کوانتومی $\frac{\hbar k}{mv_F}$ برای مدل‌های ولاسوف–پواسون (VP) و ویگنر–پواسون (WP)

به‌منظور برجسته‌سازی تفاوت پاسخ خطی و غیرخطی در پدیده میرایی، شایان ذکر است که رفتار وابسته به دامنه میرایی پیش‌تر در سامانه‌های نوسانی کلاسیک نیز گزارش شده است. به‌طور مشخص، در مقاله توپالگو و همکاران (۲۰۱۱)، شکل ۴.۱ به‌وضوح نشان می‌دهد که نرخ میرایی و دامنه نوسان در رژیم غیرخطی از رفتار خطی فاصله گرفته و به‌شدت به دامنه جابه‌جایی وابسته می‌شود [۶۳]. این مشاهده، انگیزه قوی برای بررسی مشابه این پدیده در چارچوب پلاسماهای کوانتومی فراهم می‌کند. در این راستا، در این کار با افزودن شبیه‌سازی عددی معادله ویگنر–پواسون، نرخ میرایی لاندائو در هر دو رژیم خطی و غیرخطی محاسبه شده و نتایج آن با پیش‌بینی‌های کلاسیک مدل ولاسوف–پواسون مقایسه می‌گردد. این مقایسه امکان شناسایی نقش اثرات کوانتومی در تعدیل میرایی، انتقال انرژی و سرکوب پدیده‌های غیرخطی را به‌صورت کمی فراهم می‌سازد. در ادامه، تحول انرژی موج و انرژی جنبشی ذرات نیز بررسی شده است (شکل ۹). در VP انتقال انرژی از موج به ذرات تشدیدی رخ می‌دهد و سپس به‌واسطه‌ی اختلاط غیرخطی فضای فاز، بخشی از انرژی می‌تواند به موج بازگردد (نشانه‌ای از اشباع و دینامیک trapping). در مقابل، در WP انتقال انرژی یکنواخت‌تر و برگشت‌ناپذیرتر به نظر می‌رسد که با نبود ساختارهای trapping پایدار سازگار است.

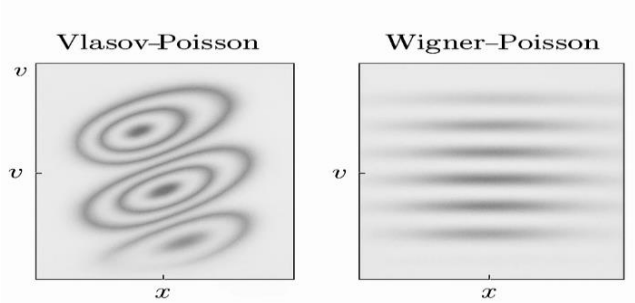


شکل ۹. تحول زمانی انرژی میدان در مدل‌های ولاسوف–پواسون (VP)و ویگنر–پواسون (WP)

جدول ۲. مقایسه کیفی پیش بینی های نظری این کار با مشاهدات آزمایشگاهی گزارش شده

شواهد آزمایشگاهی گزارش شده	پیش بینی نظری در این مقاله	پدیده فیزیکی
کاهش میرایی مؤثر در پلاسماهای حالت جامد و نانوپلاسماها [24]	کاهش نرخ میرایی با افزایش اثرات کوانتومی ()	میرایی لاندائو
اشباع غیرخطی و گذار به رفتار میرا در سیستم های چگال [33]	اشباع پایدار در VP و تضعیف نوسانات در WP	اشباع غیرخطی امواج
تغییر رفتار جمعی با کاهش مقیاسهای طولی[45]	گذار تدریجی از رژیم کلاسیک به کوانتومی با افزایش	وابستگی به پارامتر کوانتومی
کاهش یا محوشدگی ساختارهای کلاسیک در رژیم های کوانتومی[63]	شکل گیری گردابه ها در VP و سرکوب آنها در WP	ساختارهای گردابه ای در فضای فاز

منشأ فیزیکی این اختلاف‌ها در شکل‌های فضای فاز (شکل 10) روشن می‌شود: در VP، تشکیل گردابه‌های فضای فاز در حوالی سرعت فاز موج مشاهده می‌شود که مشخصه‌ی کلاسیک میرایی لاندائو در رژیم غیرخطی است و مکانیسم اصلی اشباع میرایی را فراهم می‌کند[۵۹]. در WP، این ساختارها به‌دلیل اثرات کوانتومی (از جمله تداخل و هموارشدگی/نوسانات ویگنری) به‌شدت تغییر شکل یافته یا سرکوب می‌شوند؛ بنابراین مسیر غیرخطی تکامل سیستم از حالت کلاسیک جدا می‌گردد. این نتایج نشان می‌دهند اثرات کوانتومی صرفاً اصلاح نرخ میرایی خطی نیستند، بلکه به‌طور کیفی دینامیک غیرخطی را تغییر می‌دهند. سرکوب تشکیل گردابه‌های فضای فاز، یک مکانیسم فیزیکی روشن برای تفاوت میرایی در VP و WP ارائه می‌کند و مرز معناداری میان رژیم‌های کلاسیک/نیمه‌کلاسیک و کوانتومی را مشخص می‌سازد.



شکل ۱۰. مقایسه توزیع فضای فاز (x, v) در مدل‌های ولاسوف–پواسون (VP) و ویگنر–پواسون (WP) در رژیم غیرخطی.

به‌طور کلی، نتایج ارائه‌شده در این بخش نشان می‌دهند که تفاوت میان توصیف‌های کلاسیک و کوانتومی میرایی لاندائو صرفاً به اصلاح مقدار نرخ میرایی در رژیم خطی محدود نمی‌شود، بلکه به‌طور بنیادی در دینامیک غیرخطی و مسیر تکامل سامانه ظاهر می‌گردد. در حالی‌که در چارچوب ولاسوف–پواسون، اشباع میرایی از طریق trapping ذرات و تشکیل گردابه‌های پایدار فضای فاز اجتناب‌ناپذیر است، توصیف ویگنر–پواسون به‌دلیل غیرموضعی‌بودن و اثرات تداخلی کوانتومی، از شکل‌گیری و پایداری این ساختارها جلوگیری کرده و در نتیجه میرایی لاندائو را در زمان‌های طولانی‌تر حفظ می‌کند. تحلیل کمی نرخ میرایی مؤثر، تحول انرژی و تصاویر فضای فاز به‌طور منسجم نشان می‌دهد که مدل‌های نیمه‌کلاسیکی سیال ممکن است دینامیک غیرخطی و میزان میرایی واقعی را به‌صورت سیستماتیک کم‌برآورد کنند. از این منظر، مقایسه‌ی حاضر یک معیار فیزیکی روشن برای تشخیص حدود اعتبار تقریب‌های کلاسیک، نیمه‌کلاسیکی و کوانتومی فراهم می‌سازد و چارچوبی کارگشا برای تفسیر پدیده‌های موج–ذره در پلاسماهای کوانتومی بدون برخورد ارائه می‌دهد.

۶- روش‌های عددی و تنظیمات محاسباتی.

نتایج عددی ارائه‌شده در این مقاله حاصل شبیه‌سازی‌های نماینده از دستگاه‌های ولاسوف–پواسون (VP) و ویگنر–پواسون (WP) هستند و هدف اصلی آن‌ها پشتیبانی از تحلیل‌های مفهومی و تحلیلی مقاله است، نه ارائه یک مطالعه عددی جامع و مستقل. تابع توزیع در فضای فاز با استفاده از یک شبکه یکنواخت گسسته‌سازی شده است. در راستای مکانی، شرایط مرزی تناوبی اعمال شده و فضای سرعت در بازه‌ای متناهی و به‌اندازه کافی بزرگ در نظر گرفته شده است تا اثرات مصنوعی ناشی از مرزها به حداقل برسد. انتگرال‌گیری زمانی با استفاده از یک طرح صریح انجام شده و گام زمانی بر اساس قیود پایداری متداول انتخاب شده است. در چارچوب مدل ویگنر–پواسون، جمله غیرموضعی کوانتومی به‌صورت سازگار با همین گسسته‌سازی فضای فاز محاسبه شده است. پتانسیل الکتروستاتیکی خودسازگار در هر گام زمانی از حل معادله پواسون با شرایط مرزی تناوبی به‌دست آمده است. برای اطمینان از اعتبار نتایج، آزمون‌های همگرایی نسبت به تفکیک شبکه و گام زمانی انجام شده و نشان داده شده است که روندهای گزارش‌شده نسبت به انتخاب پارامترهای عددی حساسیت معناداری ندارند. این تنظیمات عددی، با وجود سادگی نسبی، برای بازتولید تفاوت‌های کیفی و کمی کلیدی میان رژیم کلاسیک و کوانتومی ــ از جمله رفتار میرایی، اشباع غیرخطی و تغییر یا سرکوب ساختارهای کلاسیک در فضای فاز ــ کاملاً کافی هستند. به‌منظور ارزیابی اعتبار فیزیکی پیش‌بینی‌های نظری حاصل از این شبیه‌سازی‌ها، در ادامه یک مقایسه کیفی میان روندهای اصلی به‌دست‌آمده از مدل حاضر و نتایج آزمایشگاهی گزارش‌شده در ادبیات ارائه شده است که در جدول ۲ خلاصه می‌شود[۶۲-۶۰].

به‌طور خلاصه، نتایج این بخش نشان می‌دهند که تفاوت میان توصیف کلاسیک و کوانتومی میرایی لاندائو صرفاً به اصلاح مقدار نرخ میرایی در رژیم خطی محدود نمی‌شود، بلکه به‌طور بنیادی در دینامیک غیرخطی و مسیر تکامل سامانه ظاهر می‌گردد. در چارچوب ولاسوف–پواسون، اشباع میرایی از طریق trapping

ذرات و تشکیل گردابه‌های پایدار فضای فاز یک مکانیسم ذاتی است که به توقف یا تضعیف میرایی در زمان‌های طولانی می‌انجامد. در مقابل، در توصیف ویگنر–پواسون، غیرموضعی‌بودن و اثرات تداخلی کوانتومی مانع از شکل‌گیری و پایداری این ساختارهای کلاسیک شده و در نتیجه، میرایی لاندائو حتی در رژیم غیرخطی نیز تداوم می‌یابد. تحلیل کمی نرخ میرایی مؤثر، تحول انرژی و تصاویر فضای فاز به‌طور منسجم نشان می‌دهد که مدل‌های نیمه‌کلاسیکی سیال می‌توانند دینامیک غیرخطی و میزان میرایی واقعی را به‌صورت نظام‌مند کم‌برآورد کنند. از این منظر، نتایج حاضر یک معیار فیزیکی روشن برای تشخیص حدود اعتبار تقریب‌های کلاسیک، نیمه‌کلاسیکی و کوانتومی فراهم می‌سازند و چارچوبی کارگشا برای تفسیر پدیده‌های موج–ذره در پلاسماهای کوانتومی بدون برخورد، به‌ویژه در سامانه‌های چگال و فلزی، ارائه می‌دهند[۵۹] .

۷- نتیجه‌گیری و چشم‌اندازهای آینده

در این مقاله، یک مرور تحلیلی و مقایسه‌ای منسجم از چارچوب‌های نظری متداول برای توصیف پلاسماهای کوانتومی الکترواستاتیک و بدون برخورد ارائه شد که در آن، مدل کلاسیک ولاسوف–پواسون، توصیف کاملاً کوانتومی ویگنر–پواسون و تقریب‌های نیمه‌کلاسیکی در یک بستر فیزیکی واحد مورد بررسی قرار گرفتند. ضرورت انجام این پژوهش از این واقعیت ناشی می‌شود که اگرچه میرایی لاندائو و دینامیک موج–ذره در پلاسماهای کوانتومی به‌طور گسترده مطالعه شده‌اند، بخش قابل‌توجهی از ادبیات موجود به تحلیل‌های خطی محدود بوده یا نتایج را بدون مقایسه‌ی نظام‌مند میان مدل‌ها تفسیر کرده است [۲۸ و۲۷]. این محدودیت به‌ویژه در رژیم‌های غیرخطی، که پدیده‌هایی نظیر trapping ذرات و تشکیل ساختارهای گردابه‌ای در فضای فاز نقش تعیین‌کننده‌ای دارند، منجر به نتایج پراکنده و گاه متناقض شده است [۳۴–۲۹].

نوآوری اصلی این کار در ارائه‌ی یک چارچوب مقایسه‌ای انتقادی نهفته است که امکان ارزیابی حدود اعتبار هر یک از این مدل‌ها را، فراتر از سطح توصیف کیفی، فراهم می‌سازد. با اتکا به نتایج نظری شناخته‌شده برای تعادل‌های فرمی–دیراک در دمای صفر [۳۵،۴۷،۴۸] و با استفاده از شبیه‌سازی‌های عددی معادلات ولاسوف–پواسون و ویگنر–پواسون، نشان داده شد که تفاوت میان توصیف کلاسیک و کوانتومی به اصلاح جزئی نرخ میرایی در رژیم خطی محدود نمی‌شود. نتایج عددی ارائه‌شده بیانگر آن است که در چارچوب کلاسیک، اشباع میرایی لاندائو به‌واسطه‌ی trapping ذرات و شکل‌گیری ساختارهای گردابه‌ای پایدار در فضای فاز رخ می‌دهد، در حالی که در توصیف ویگنر–پواسون، غیرموضعی‌بودن ذاتی و تداخلات کوانتومی منجر به سرکوب یا تضعیف این ساختارها شده و میرایی مؤثر حتی در رژیم‌های غیرخطی نیز تداوم می‌یابد؛ نتیجه‌ای که با تحلیل‌های پیشین مبتنی بر خواص تابع ویگنر و بسط‌های کوانتومی مرتبه‌بالا سازگار است[۴۲و۲۲].

تحلیل کمی نرخ میرایی مؤثر و تحول ساختارهای فضای فاز همچنین نشان می‌دهد که مدل‌های نیمه‌کلاسیکی سیال، اگرچه در برخی رژیم‌های گذار قابل استفاده‌اند، می‌توانند دینامیک غیرخطی و شدت واقعی میرایی را به‌طور نظام‌مند کم‌برآورد کنند. در این راستا، معرفی و تفسیر فیزیکی پارامتر بی‌بعد χ به‌عنوان معیاری برای سنجش نسبت اثرات کوانتومی به سازوکارهای رزونانسی کلاسیک، ابزار روشنی برای تفکیک رژیم‌های کلاسیک، گذار و کوانتومی فراهم می‌کند و انتخاب مدل مناسب را در مطالعات نظری و عددی تسهیل می‌سازد [۳۷–۳۵]. افزون بر این، تشریح صریح روش‌های عددی، شرایط مرزی و ملاحظات پایداری محاسباتی، و نیز مقایسه‌ی کیفی نتایج با مشاهدات آزمایشگاهی گزارش‌شده در ادبیات، پیوند میان پیش‌بینی‌های نظری و واقعیت فیزیکی سامانه‌های چگال را تقویت می‌کند.

در مجموع، نتایج این مطالعه نشان می‌دهند که برای توصیف دقیق پلاسماهای کوانتومی بدون برخورد، به‌ویژه در رژیم‌های غیرخطی، تعمیم ساده‌ی مدل‌های کلاسیک کافی نیست و استفاده از چارچوب‌های جنبشی کامل کوانتومی در بسیاری از شرایط اجتناب‌ناپذیر است. چارچوب تحلیلی و مقایسه‌ای ارائه‌شده در این مقاله می‌تواند به‌عنوان مبنایی قابل اعتماد برای تفسیر نتایج پیشین و طراحی مطالعات آینده در حوزه‌ی پلاسماهای کوانتومی، نانوساختارهای فلزی و سامانه‌های الکترونیکی پیشرفته مورد استفاده قرار گیرد و مسیر روشنی برای پژوهش‌های آتی در زمینه‌ی دینامیک غیرخطی و برهم‌کنش موج–ذره در رژیم‌های کوانتومی فراهم سازد.

منابع

1. F. Calvayrac, P.-G. Reinhard, E. Suraud, and C. Ullrich, Nonlinear electron dynamics in metal clusters. Phys. Rep. 337, 493–578, (2000).

2. J. Heimerl, A. Rasputnyi, J. Pölloth, S. Meier, M. Chekhova, P. Hommelhoff, Quantum light drives electrons strongly at metal needle tips. Nature Physics. 21, 1899–1904, (2025).

3. S. D. Brorson, J. G. Fujimoto, and E. P. Ippen, Femtosecond electronic heat-transport dynamics in thin gold films. Phys. Rev. Lett. 59, 1962–1965, (1987).

4. V.A. Cimmelli, D. Jou, A. Sellitto, Hydrodynamic, electronic and optic analogies with heat transport in extended thermodynamics. Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics. 49, 2, (2024).

5. C. Su´arez, W. E. Bron, and T. Juhasz, Dynamics and transport of electronic carriers in thin gold films. Phys. Rev. Lett. 75, 4536–4539, (1995).

6. S. Giannini, J. Blumberger, Charge Transport in Organic Semiconductors: The Perspective from Nonadiabatic Molecular Dynamics. Accounts of Chemical Research. 55 (2022).

7. J.-Y. Bigot, V. Halt´e, J.-C. Merle, and A. Daunois, Electron dynamics in metallic nanoparticles. Chem. Phys. 251, 181–203, (2000).

8. J. Zhang, B. Zhu, L. Zhanga, J. Yu, Femtosecond transient absorption spectroscopy investigation into the electron transfer mechanism in photocatalysis. Chemical communications. 6 (2023)

9. A. Domps, P.-G. Reinhard, and E. Suraud, Fermionic Vlasov propagation for Coulomb interacting systems. Ann. Phys. (N.Y.) 260, 171–190, (1997).

10. S. Jin, J. Jang, Non-relativistic limit of fermion ground states for the relativistic Vlasov-Poisson system. Journal of Mathematical Physics. 66, 011504, (2025).

11. N. C. Kluksdahl, A. M. Kriman, D. K. Ferry, and C. Ringhofer, Self-consistent study of the resonant-tunneling diode. Phys. Rev. B 39, 7720–7735, (1989).

12. S.Y. Zhong, S.S. Zhang, X.X. Sun, M.S. Smith, Study of the deformed halo nucleus 31Ne with Glauber model based on microscopic self-consistent structures. Science China Physics, Mechanics & Astronomy. 65, 262011, (2022).

13. P. A. Markowich, C. A. Ringhofer, and C. Schmeiser, Semiconductor equations, Springer, Vienna, 1990.

14. S. Mondal, A. Sur, A novel unified modeling of heat and moisture transport in a semiconductor containing spherical cavity. Acta Mechanica. 6 (2026).

15. M. C. Yalabik, G. Neofotistos, K. Diff, H. Guo and J. D. Gunton, Quantum mechanical simulation of charge transport in very small semiconductor structures. IEEE Trans. Electron Devices 36, 1009–1013, (2002).

16. P.R. Bueno, Quantum Rate Dynamics for Coherent Electron Transport at Material/Electrolyte Interfaces. ACS Applied Materials & Interfaces. 13 (2026).

17. J. H. Luscombe, A. M. Bouchard and M. Luban, Electron confinement in quantum nanostructures: Self-consistent Poisson-Schr¨odinger theory. Phys. Rev. B 46, 10262–10268, (1992).

18. H. Jubair, Electronic and optical coupling in semiconductor nanostructures: A systematic review of quantum dots, nanowires, and nanoplatelets for high-efficiency solar cells. Journal of Power Sources. 669, 239394, (2026).

19. A. Arnold and H. Steinr¨uck, The ‘electromagnetic’ Wigner equation for an electron with spin. Z. Angew. Math. Phys. 40, 793–815, (1989).

20. C. Etl, M. Ballicchia, M. Nedjalkov, H. Kosina, Gauge-invariant Wigner equation for electromagnetic fields:Strong and weak formulation. Physics Letters A. 565, 5, 131127, (2026).

21. S. Balberg and S. L. Shapiro, The properties of matter in white dwarfs and neutron stars, astro-ph/0004317.

22. F. F. Chen, Introduction to plasma physics and controlled fusion, Plenum Press, New York, 1984.

23. L. D. Landau and E. M. Lifshitz, Statistical Physics, part 1, Butterworth-Heinemann, Oxford, 1980.

24. N. W. Ashcroft and N. D. Mermin, Solid state physics, Saunders College Publishing, Orlando, 1976.

25. M. Bonitz et al., Theory and simulation of strong correlations in quantum Coulomb systems. J. Phys. A: Math. Gen. 36, 5921–5930, (2003).

26. E. P. Wigner, On the quantum correction for thermodynamic equilibrium. Phys. Rev. 40, 749–759, (1932).

27. J. E. Moyal, Quantum mechanics as a statistical theory. Proc. Cambridge Phil. Soc. 45 (1949), 99–124.24 Giovanni Manfredi V. I. Tatarskii, The Wigner representation of quantum mechanics. Sov. Phys. Usp. 26 (1983), 311–327 [Usp. Fis. Nauk. 139, 587], (1983).

28. M. Hillery, R. F. O’Connell, M. O. Scully, and E. P. Wigner, Distribution functions in physics: Fundamentals. Phys. Rep. 106, 121–167 , (1984).

29. G. Manfredi and M. R. Feix, Entropy and Wigner functions. Phys. Rev. E 53, 6460–6470, (2000).

30. J.E. Drummond, Plasma Physics, McGraw- Hill, New York, 1961.

31. F. Haas, G. Manfredi, J. Goedert, Nyquist method for Wigner-Poisson quantum plasmas. Phys. Rev. E 64, 026413, (2001).

32. M. Bonitz, D. C. Scott, R. Binder, and S. W. Scott, Nonlinear carrier-plasmon interaction in a one-dimensional quantum plasma. Phys. Rev. B 50, 15095–15098, (1994).

33. E. K. U. Gross, J. F. Dobson, and M. Petersilka, Density functional theory of time-dependent phenomena, Topics in Current Chemistry, vol. 181, Springer, Berlin, pp. 81-172, 1996.

34. D. Pines, Classical and quantum plasmas. J. Nucl. Energy C 2, 5-17, (1961).

35. J. Dawson, On Landau damping. Phys. Fluids 4 , 869-874, (1961).

36. F. Haas, G. Manfredi and M. R. Feix, Multistream model for quantum plasmas. Phys. Rev. E 62, 2763–2772, (2000).

37. D. Anderson, B. Hall, M. Lisak, and M. Marklund, Statistical effects in the multistream model for quantum plasmas. Phys. Rev. E 65, 046417, (2002).

38. G. Manfredi and F. Haas, Self-consistent fluid model for a quantum electron gas. Phys. Rev. B 64, 075316, (2001).

39. D. Deutsch. Quantum theory, the church{turing principle and the universal quantum computer. Proc. R. Soc. Lond., 1985

40. C. L. Gardner, Quantum hydrodynamic model for semiconductor devices. SIAM J. Appl. Math. 54, 409–427, (1994).

41. G. Manfredi and P.-A. Hervieux, Vlasov simulations of ultrafast electron dynamics and transport in thin metal films. Phys. Rev. B 70 (2004), 201402(R).

42. W. R. Frensley, Boundary conditions for open quantum systems driven far from equilibrium. Rev. Mod. Phys. 62, 745–791, (1990).

43. W. Kohn and L. J. Sham, Self-consistent equations including exchange and correlation effects. Phys. Rev. 140, A1133–A1138, (1965).

44. W. Ekardt, Work function of small metal particles: Self-consistent spherical jellium-background model. Phys. Rev. B 29, 1558–1564, (1984).

45. R. G. Parr and W. Young, Density functional theory of atoms and molecules, Oxford University Press, New York, 1989.

46. R. Balescu, Statistical mechanics of charged particles, John Wiley, London, 1963.

47. M. Bonitz, R. Binder, D. C. Scott, S. W. Koch, and D. Kremp, Theory of plasmons in quasi-onedimensional degenerate plasmas. Phys. Rev. E 49, 5535–5545, (1994).

48. P. Bertrand and M. R. Feix, Nonlinear electron plasma oscillation: the" water bag model". Phys. Lett. A 28, 68–69, (1968).

49. D. Deutsch and R. Jozsa. Rapid solution of problems by quantum computation. Proceedings: Mathematical and Physical Sciences. 439, 553-558, (1992).

50. N. Suh, M. R. Feix, and P. Bertrand, Numerical simulation of the quantum Liouville-Poisson system. J. Comput. Phys. 94, 403–418, (1991).

51. G. Manfredi, Long-time behavior of nonlinear landau damping. Phys. Rev. Lett. 79, 2815–2818, (1997).

52. C. Z. Cheng and G. Knorr, The integration of the Vlasov equation in configuration space. J. Comput. Phys. 22, 330–351, (1976).

53. F. Filbet, E. Sonnendrucker, and P. Bertrand, Conservative numerical schemes for the Vlasov equation. J. Comput. Phys. 172, 166–187, (2001).

54. J. L. Lopez, Nonlinear Ginzburg-Landau-type approach to quantum dissipation. Phys. Rev. E 69, 026110, (2004).

55. A. O. Caldeira and A. J. Leggett, Path integral approach to quantum Brownian motion. Physica A 121, 587–616, (1983).

56. L. Diosi, Calderia-Leggett master equation and medium temperatures. Physica A 199, 517–526, (1993).

57. W. H. Zurek, S. Habib, and J. P. Paz, Coherent states via decoherence. Phys. Rev. Lett. 70, 1187–1190, (1993).

58. W. Ebeling, A. F¨orstery, H. Hessz and M. Yu. Romanovsky, Thermodynamic and kinetic properties of hot nonideal plasmas. Plasma Phys. Control. Fusion 38, A31-A47, (1996).

59. S. Lloyd. Universal quantum simulators. Science. 273 , 1073-1078, (1996).

60. B. Shokri and A. A. Rukhadze, Quantum surface wave on a thin plasma layer. Phys. Plasmas 6, 3450–3454, (1999).

61. B. Shokri and A. A. Rukhadze, Quantum drift waves. Phys. Plasmas 6, 4467–4471, (1999).

62. L. Tian, R. Blatt, and P. Zoller. Scalable ion trap quantum computing without moving ions. The European Physical Journal D. 32, 201-208, (2004).

63. N. Topaloglu, A. Aksekili, B. Yegin, a displacement dependent damper for a vibration-based energy harvester. Conference: SET2011, 10th International Conference on Sustainable Energy TechnologiesAt: Istanbul, Turkey.

JMRPh. (10)(2): 38-61, Autumn & Winter 2026

Modeling Quantum Effects in Collisionless Electrostatic Plasmas and Comparison of Results within Linear and Nonlinear Frameworks

[1]Zeynab Kiamehr

[1*] Department of Physics, Tafresh University, Tafresh, Iran

Article details

Received: 2025/11/19
Accepted: 2026/04/27
Published: 2026/05/31

ISSN: 2588-493x
eISSN: 2588-4821

Correspondence email:
z.kiamehr@tafreshu.ac.ir

Abstract

Classical plasma physics is mainly focused on the regimes of high temperatures and low densities, where quantum mechanical effects are negligible and a description based on the Vlasov–Poisson equations is sufficient. However, recent advances in metallic nanostructures, semiconductor devices, and dense systems have highlighted the necessity of studying plasmas in regimes where quantum effects of particles play a decisive role in the dynamics of the system. In this paper, a coherent analytical and comparative review of the common theoretical frameworks for describing electrostatic and collisionless quantum plasmas is presented, including the full Wigner–Poisson kinetic model, the Hartree equivalent description, quantum fluid models, and semiclassical kinetic approximations. The main focus of this review is to determine the limits of validity of these models, especially in the nonlinear regime, and to compare the physical assumptions underlying each of them. Relying on the available analytical results and selected numerical simulations of the Vlasov–Poisson and Wigner–Poisson equations, it is shown that the difference between the classical and quantum descriptions is not limited to the quantitative modification of the Landau damping rate in the linear regime, but also manifests itself qualitatively in the nonlinear evolution of the system. In the classical framework, damping saturation occurs through particle trapping and the formation of stable phase space structures, while in the Wigner–Poisson description, nonlocality and quantum interferences prevent the formation and stability of these structures, and effective damping persists even at long times. It is also shown that fluid and semiclassical models, although applicable in some transition regimes, can systematically underestimate the nonlinear dynamics and the true intensity of damping. In fact, this paper, by providing a clear comparative framework, delineates the boundary between classical, transition, and quantum regimes and provides a coherent basis for interpreting existing theoretical and numerical results in the study of collisionless quantum plasmas, especially in dense systems.

Keywords: Plasma physics, quantum effects, modeling in plasmas, collisionless plasma, kinetic model.