تاثیر تکانه زاویه‌ای بر ویژگی‌های ترمودینامیکی ایزوتوپ‌های $^{147-146}Nd$

شهاب افروخته

گروه فیزیک، اداره آموزش و پرورش شهرستان کنگان، کنگان، بوشهر، ایران

اطلاعات مقاله

تاریخ دریافت: 1405/06/15
تاریخ پذیرش: 1405/07/15
تاریخ چاپ: 1405/07/20

شاپای چاپی: 2588-4921
شاپای الکترونیکی: 2588-493x

نویسنده مسئول:

a.shahab1370@gmail.com

Doi:
10.22034/jmrph.2026.137958.1004

چکیده

در این مقاله، تأثیر تکانه زاویه‌ای بر خواص ترمودینامیکی ایزوتوپ‌های $^{147-146}Nd$ بررسی شده است. برای این منظور، از مدل BCS با مقدار میانگین پارامتر گاف (MEGBCS) برای در نظر گرفتن افت و خیزهای گرمایی استفاده شده است. در این مدل، کمیت‌های ترمودینامیکی هسته با استفاده از مقدار میانگین پارامتر گاف در تکانه‌های زاویه‌ای مختلف محاسبه می‌شوند. نتایج حاصل از مدل BCS نیز برای مقایسه ارائه شده‌اند. نتایج به دست آمده نشان می‌دهند که بر خلاف مدل BCS که جفت‌شدگی در دمای بحرانی از بین می‌رود، در مدل MEGBCS، با افزایش دما جفت‌شدگی در دمای بحرانی از بین نمی‌رود بلکه به مقدار ثابتی میل می‌کند. همچنین در تکانه‌های زاویه‌ای زیاد با افزایش دما جفت‌شدگی نیز افزایش پیدا می‌کند که به این پدیده بازگشت گرمایی همبستگی جفت‌شدگی گفته می‌شود. همچنین، در نظر گرفتن افت و خیزهای گرمایی منجر به یک ساختار S شکل در نمودار ظرفیت گرمایی بر حسب دما می‌شود که می‌توان آن را به عنوان گذار فاز جفت‌شدگی تفسیر کرد. همچنین مشاهده شد که با افزایش تکانه زاویه‌ای ساختار S شکل ظرفیت گرمایی نیز ناپدید می‌شود و تغییر فاز هسته‌ها در دمای پایین‌تری رخ می‌دهد. چگالی‌تراز هسته‌ای بر حسب انرژی برانگیختگی در تکانه‌های زاویه‌ای $J = 0 - 20\,\hbar$ محاسبه و با داده‌های تجربی و نتایج مدل پوسته‌ای مونت کارلو (SMMC) مقایسه شدند. مشاهده شد که با افزایش انرژی برانگیختگی، چگالی تراز هسته‌ای نیز افزایش می‌یابد ولی با افزایش تکانه زاویه‌ای، چگالی‌تراز هسته‌ای کاهش پیدا می‌کند. محاسبات انجام شده در روش MEGBCS برای هسته‌های $^{147-146}Nd$ تطابق خوبی با داده‌های تجربی و مدل SMMC دارند.

واژگان کلیدی: تکانه زاویه‌ای، افت و خیزهای گرمایی، ظرفیت گرمایی، چگالی‌تراز هسته‌ای

مقدمه

در فیزیک هسته‌ای محاسبه تکانه زاویه‌ای[1] و وابستگی کمیت‌های ترمودینامیکی مانند ظرفیت گرمایی[2]، انرژی برانگیختگی[3] و آنتروپی به تکانه زاویه‌ای بسیار مهم است. افزایش تکانه زاویه‌ای هسته مانند دما سبب برانگیخته شدن هسته از حالت پایه می‌شود. میزان افزایش انرژی ناشی از افزایش تکانه زاویه‌ای هم مرتبه با میزان افزایش انرژی هسته ناشی از دما است. در این حالت تکانه زاویه‌ای مانند دما سبب شکسته شدن جفت‌های کوپر[4] می‌شود و در تکانه زاویه‌ای خاصی جفت‌شدگی هسته‌ها از بین می‌رود.

با افزایش تکانه زاویه‌ای، افت و خیزهای گرمایی[5] نیز درون هسته افزایش می‌یابد. پس در هنگام محاسبه کمیت‌های ترمودینامیکی هسته بر حسب تکانه زاویه‌ای باید افت و خیزهای گرمایی در نظر گرفته شود. در این حالت نتایج به دست آمده نشان می‌دهند که با افزایش تکانه زاویه‌ای گذار فاز از حالت جفت شده به حالت نرمال نیز هموار می‌شود تا در نهایت از بین برود [۱].

چگالی‌تراز هسته‌ای[6] یکی از کمیت‌های مهم و کلیدی برای محاسبه سطح مقطع واکنش‌ها و همچنین محاسبات آماری در بسیاری از زمینه‌های فیزیک هسته‌ای به شمار می‌رود [۵-۲]. محاسبه چگالی‌تراز بر حسب تکانه زاویه‌ای در فیزیک هسته‌ای از اهمیت بالایی برخوردار است. برای انجام محاسبات آماری واکنش‌های هسته‌ای و برای بررسی طیف ذرات آلفا در هسته‌های تغییر شکل یافته به وابستگی چگالی‌تراز هسته‌ای برحسب تکانه زاویه‌ای نیاز است [۷-۶].

برای محاسبه مقادیر ترمودینامیکی هسته، از روش‌هایی مثل تقریب مسیر ایستا[7] (SPA) [۹-۸]، روش لیپکین نوگامی[8] (LN) [۱۲-۱۰]، مدل BCS[9] [۱۴-۱۳،۴] استفاده می‌شود. مدل BCS قادر است پدیده ابررسانایی را در سیستم‌های الکترونی بی‌نهایت، با دقت بسیار بالایی توصیف نماید. در ابررساناها، برهمکنش میان الکترون‌های نزدیک به سطح فرمی منجر به تشکیل جفت‌های کوپر می‌گردد. دو الکترون جفت شده دارای اسپین کل صفر و تکانه‌های خطی برابر در جهت‌های متقابل K و $-K$ می‌باشند [۱۵]. در هسته‌ها نیز، به دلیل برهمکنش‌های جفت‌شدگی میان نوکلئون‌ها، رفتار ابررسانایی مشابهی رخ می‌دهد. پارامتر گاف[10] (Δ) تعیین کننده قدرت جفت‌شدگی در هسته‌ها است؛ این پارامتر را می‌توان از طریق اختلاف جرم میان هسته‌های زوج و فرد مجاور، به صورت تجربی به دست آورد [۱۶]. با این حال، توصیف نظری و مطالعه تغییرات پارامتر گاف با دما، نیازمند مدل‌های نظری مناسبی است. در مورد هسته‌ها با اندازه و تعداد ذرات محدود، اثر افت و خیزهای گرمایی قابل چشم‌پوشی نیست و این امر به ویژه در پدیده‌ای تحت عنوان گذار فاز جفت شدگی حائز اهمیت است [۱۹-۱۷]. گذار فاز در ابررساناها کاملا ناگهانی است؛ در نتیجه، ظرفیت گرمایی در دماهای بحرانی که در آن پارامتر گاف صفر می‌شود، دچار ناپیوستگی می‌گردد [۲۱-۲۰]. پدیده‌ای مشابه در سایر سیستم‌های هسته‌ای نیز مشاهده می‌شود؛ با این تفاوت که گذار فاز در هسته‌ها با یک الگوی S شکل همراه است که نشان دهنده ماهیت گذار فاز جفت‌شدگی گرمایی در این سیستم‌های محدود می‌باشد [۲۴-۲۲].

در پژوهش حاضر، کمیت‌های ترمودینامیکی ایزوتوپ‌های $^{146-147}$Nd نظیر انرژی برانگیختگی، آنتروپی، ظرفیت گرمایی و چگالی‌تراز هسته‌ای در تکانه‌های زاویه‌ای مختلف با استفاده از مدل مقدار میانگین پارامتر گاف (MEGBCS[11]) محاسبه شده و نتایج محاسبات چگالی‌تراز هسته‌ای با داده‌های تجربی و نتایج مدل پوسته‌ای مونت کارلو[12] (SMMC) [۲۵] مقایسه شده است.

---

[1] Angular momentum
[2] Heat capacity
[3] Excitation energy
[4] Cooper pair
[5] Thermal Fluctuations
[6] Nuclear level density
[7] Static Path Approximation
[8] Lipkin-Nogami
[9] Barden-Cooper-Schrieffer
[10] Gap parameter
[11] Mean Gap BCS
[12] Shell Model Monte Carlo

مدل MEGBCS در اصل همان مدل BCS اصلاح شده است که پارامتر گاف میانگین جایگزین پارامتر گاف معمولی می‌شود. در مدل‌های شبیه BCS، در اصل درستی روابط آن‌ها با استفاده از داده‌های تجربی تایید می‌شوند و برای بررسی نظری کمیت‌های ترمودینامیکی هسته‌ها بسیار مناسب هستند. نتایج به دست آمده از مدل BCS نیز برای مقایسه ارائه شده‌اند. لازم به ذکر است که مدل BCS از آنجایی که برای سیستم‌های نامحدود مانند ابرساناها ارائه می‌شود، اثر افت و خیزهای گرمایی برای سیستم‌های محدود مانند هسته را نادیده می‌گیرد. به همین دلیل برای بررسی دقیق‌تر کمیت‌های ترمودینامیکی هسته از مدل BCS اصلاح شده یا همان MEGBCS استفاده می‌شود که در آن اثر افت و خیزهای گرمایی در سیستم‌های کوچک مانند هسته لحاظ شده است. در بخش بعدی این مقاله، فرمول بندی مدل BCS و MEGBCS با در نظر گرفتن تکانه زاویه‌ای به طور خلاصه بیان شده است. در بخش دوم محاسبات و نتایج ارائه شده‌اند. در قسمت سوم نتیجه‌گیری و در قسمت آخر مراجع بیان شده است.

۱- روابط نظری

قدم اول در محاسبات BCS نوشتن هامیلتونی یک سیستم فرمیونی با استفاده از کوانتش دوم[۱۳] است که از دو جمله تشکیل شده است. جمله اول تک‌ذره‌ای است و جمله دوم دو ذره‌ای بوده که حالت‌های برگشت زمانی را به هم مرتبط می‌کند. در ساده‌ترین شکل، پتانسیل برهمکنشی یک مقدار ثابت جاذبه $-G$ در نظر گرفته می‌شود [۲۶-۲۷]:

(۱)

$$\hat{H} = \sum_k \varepsilon_k (a_k^\dagger a_k + a_{-k}^\dagger a_{-k}) - G \sum_{k,k'} a_{-k'}^\dagger a_{k'}^\dagger a_k a_{-k}$$

در رابطه بالا، a و $a^\dagger$ به ترتیب عملگرهای فنا و خلق ذرات، ε_k انرژی تک‌ذره‌ای ذرات بدون برهمکنش و $k,-k$ حالت‌های برگشت زمانی هستند.

در ادامه هامیلتونی به منظور وارد کردن قید تعداد ذرات به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$H = H - \lambda N - \gamma M \qquad (۲)$$

در رابطه بالا، λ و γ ضرایب لاگرانژ هستند که به ترتیب به عنوان پتانسیل شیمیایی و فرکانس دورانی سیستم تعریف می‌شوند. N و M نیز به ترتیب تعداد ذرات و تصویر تکانه زاویه‌ای در راستای محور Z است که شکل عملگری آن‌ها به صورت زیر می‌باشد:

$$N = \sum_k (a_k^\dagger a_k + a_{-k}^\dagger a_{-k}) \qquad (۳)$$

$$M = \sum_k m_k a_k^\dagger a_k - \sum_{-k} m_k a_{-k}^\dagger a_{-k} \qquad (۴)$$

در رابطه بالا، m_k اسپین تک‌ذره‌ای ذرات بدون برهمکنش است. در نتیجه هامیلتونی به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\hat{H} = \sum_k \zeta_k^+ a_k^\dagger a_k + \sum_{-k} \zeta_k^- a_{-k}^\dagger a_{-k} - G \sum_{k,k'} a_{-k'}^\dagger a_{k'}^\dagger a_k a_{-k} \qquad (۵)$$

که در این معادله داریم:

$$\zeta_k^+ = \varepsilon_k - \lambda - \gamma m_k$$
$$\zeta_k^- = \varepsilon_k - \lambda + \gamma m_k \qquad (۶)$$

هامیلتونی بالا به دلیل داشتن عناصر غیرقطری به صورت تحلیلی قابل حل نیست. در محاسبات بس‌ذره‌ای با استفاده از تبدیلات بوگولیوبوف[۱۴] می‌توان هامیلتونی را قطری نمود. به این ترتیب هامیلتونی به فرم شبه ذرات بدون برهمکنش و قابل حل در می‌آید. خوانندگان محترم برای اطلاعات بیشتر می‌توانند به مرجع [۲۸] مراجعه کنند.

[13] Second Quantization

[14] Bogoliubov transformation

در پایان می‌توان تابع پارش بزرگ[15] سیستم، Ω، را با استفاده از هامیلتونی قطری به دست آمده در پایه شبه ذرات[16] به صورت زیر نوشت [۱]:

$$e^{\Omega}=Tr(e^{-\beta H}) \qquad (۷)$$

$$\Omega=-\beta\sum_k(\varepsilon_k-\lambda-E_k)$$
$$+\sum_k\ln\left(۱+\exp(-\beta(E_k+\gamma m_k))\right)$$
$$+\sum_k\ln\left(۱+\exp(-\beta(E_k-\gamma m_k))\right)-\beta\frac{\Delta^۲}{G} \qquad (۸)$$

در رابطه بالا ε_k و m_k به ترتیب انرژی و اسپین تک‌ذره‌ای، G قدرت برهمکنش، λ پتانسیل شیمیایی، γ فرکانس دورانی، Δ پارامتر گاف، $E_k=\sqrt{(\varepsilon_k-\lambda)^۲+\Delta^۲}$ انرژی شبه ذرات بدون برهمکنش و β عکس دمای هسته‌ای است.

در مدل BCS از محتمل‌ترین مقدار پارامتر گاف استفاده می‌شود، برای این منظور تابع پارش بزرگ را نسبت به پارامتر گاف وردش می‌دهیم. بدین ترتیب خواهیم داشت [۲۶]:

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\Delta}=0 \qquad (۹)$$

با استفاده از رابطه (۸) و (۹) معادله گاف به صورت زیر به دست می‌آید [۲۶]:

$$\sum_k\frac{۱}{۲E_k}\left\{\tanh\left(\frac{\beta(E_k+\gamma m_k)}{۲}\right)\right.$$
$$\left.+\tanh\left(\frac{\beta(E_k-\gamma m_k)}{۲}\right)\right\}=\frac{۲}{G} \qquad (۱۰)$$

در مدل BCS مقادیری از Δ، γ و λ مجازاند که معادله گاف را برآورده کنند. اکنون با استفاده از معادله (۸)، سایر کمیات ترمودینامیکی مانند تعداد ذرات، N، انرژی برانگیختگی، E، تصویر تکانه زاویه‌ای روی محور Z، M و آنتروپی، S، به ترتیب با استفاده از روابط زیر به دست می‌آیند [۲۶]:

$$N=\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha}=\sum_k۱-\frac{\varepsilon_k-\lambda}{۲E_k}\left\{\tanh\left(\frac{\beta(E_k+\gamma m_k)}{۲}\right)\right.$$
$$\left.+\tanh\left(\frac{\beta(E_k-\gamma m_k)}{۲}\right)\right\} \qquad (۱۱)$$

$$E=-\frac{\partial\Omega}{\partial\beta}=\sum_k\varepsilon_k-\sum_k\varepsilon_k\frac{\varepsilon_k-\lambda}{۲E_k}\left\{\tanh\left(\frac{\beta(E_k+\gamma m_k)}{۲}\right)\right.$$
$$\left.+\tanh\left(\frac{\beta(E_k-\gamma m_k)}{۲}\right)\right\} \qquad (۱۲)$$

$$M=\frac{\partial\Omega}{\partial\mu}=\sum_k\left\{\frac{m_k}{۱+\exp(\beta(E_k-\gamma m_k))}\right.$$
$$\left.-\frac{m_k}{۱+\exp(\beta(E_k+\gamma m_k))}\right\} \qquad (۱۳)$$

$$S=\Omega-\alpha N+\beta E-\gamma M$$
$$=\sum_k\ln\left(۱+\exp(-\beta(E_k+\gamma m_k))\right)$$
$$+\sum_k\ln\left(۱+\exp(-\beta(E_k-\gamma m_k))\right)$$
$$+\sum_k\left\{\frac{\beta(E_k+\gamma m_k)}{۱+\exp(\beta(E_k+\gamma m_k))}\right.$$
$$\left.+\frac{\beta(E_k-\gamma m_k)}{۱+\exp(\beta(E_k-\gamma m_k))}\right\} \qquad (۱۴)$$

در روابط بالا $\alpha=\beta\lambda$ و $\mu=\beta\gamma$. ظرفیت گرمایی با رابطه $C=\frac{dE}{dT}$ تعریف می‌شود اما در شرایطی که تغییرات λ با دما بسیار اندک باشد، که عموما برای حل‌های BCS چنین است، می‌توان آن را به صورت $C=\frac{dE}{dT}\approx-\beta\frac{dS}{d\beta}$ تقریب زد. با

[15] Grand partition function

[16] Quasi-particle basis

استفاده از این تقریب، رابطه ظرفیت گرمایی به صورت رابطه (۱۵) به دست می‌آید [۲۶]:

$$C=\frac{1}{4}\sum_k \sec h^2\left(\frac{\beta(E_k+\gamma m_k)}{2}\right)\times\left[\beta^2(E_k+\gamma m_k)^2+\beta^3(E_k+\gamma m_k)\frac{\bar{\Delta}}{E_k}\frac{d\bar{\Delta}}{d\beta}\right]+\frac{1}{4}\sum_k \sec h^2\left(\frac{\beta(E_k-\gamma m_k)}{2}\right)\times\left[\beta^2(E_k-\gamma m_k)^2+\beta^3(E_k-\gamma m_k)\frac{\bar{\Delta}}{E_k}\frac{d\bar{\Delta}}{d\beta}\right] \quad (۱۵)$$

که در رابطه بالا، $\frac{d\bar{\Delta}}{d\beta}$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\frac{d\bar{\Delta}}{d\beta}=-\frac{\sum_k (E_k+\gamma m_k)\sec h^2\left(\frac{\beta(E_k+\gamma m_k)}{2}\right)}{4\beta\Delta\left[\sum_k E_k\left(a_k-b_k\right)\right]}-\frac{\sum_k (E_k-\gamma m_k)\sec h^2\left(\frac{\beta(E_k-\gamma m_k)}{2}\right)}{4\beta\Delta\left[\sum_k E_k\left(a_k-b_k\right)\right]} \quad (۱۶)$$

که داریم:

$$a_k=\frac{1}{4E_k^2}\left(\sec h^2\left(\frac{\beta(E_k+\gamma m_k)}{2}\right)+\sec h^2\left(\frac{\beta(E_k-\gamma m_k)}{2}\right)\right) \quad (۱۷)$$

$$b_k=\frac{1}{2\beta E_k^3}\left(\sec h^2\left(\frac{\beta(E_k+\gamma m_k)}{2}\right)+\sec h^2\left(\frac{\beta(E_k-\gamma m_k)}{2}\right)\right) \quad (۱۸)$$

به دلیل محدود بودن ابعاد و تعداد نوکلئون‌های موجود در هسته، تفاوت قابل توجهی میان محتمل‌ترین مقدار پارامتر گاف و مقدار متوسط آن وجود دارد. در این پژوهش، ما از تابع توزیع احتمال همدما[17] برای بهینه‌سازی روابط مدل BCS استفاده می‌کنیم [۱،۲۹]. در این روش که ما به طور اختصار آن را MEGBCS می‌نامیم، مقدار متوسط پارامتر گاف ($\bar{\Delta}$) با استفاده از تابع توزیع احتمال همدما محاسبه شده و سپس با استفاده از این کمیت، می‌توان سایر کمیت‌های ترمودینامیکی هسته را به دست آورد. احتمال قرار گرفتن سیستم در یک حالت معین با مقدار مشخصی از پارامتر گاف متناسب با e^{Ω_Δ} است. در این مدل، مقدار متوسط پارامتر گاف از رابطه زیر به دست می‌آید [۱]:

$$\bar{\Delta}_{\beta,\lambda}=\int_0^\infty P_{\Delta,\beta}\ \Delta\ d\Delta=\frac{\int_0^\infty e^{\Omega_{\Delta,\beta}}\Delta\ d\Delta}{\int_0^\infty e^{\Omega_{\Delta,\beta}}\ d\Delta} \quad (۱۹)$$

در مدل MEGBCS، تعداد ذرات، انرژی برانگیختگی، تصویر تکانه زاویه‌ای روی محور Z، آنتروپی و ظرفیت گرمایی به ترتیب با استفاده از روابط زیر به دست می‌آیند [۱]:

$$N=\sum_k 1-\frac{\varepsilon_k-\lambda}{2E_k}\left\{\tanh\left(\frac{\beta(E_k+\gamma m_k)}{2}\right)+\tanh\left(\frac{\beta(E_k-\gamma m_k)}{2}\right)\right\}+\beta\bar{\Delta}\frac{\partial\bar{\Delta}}{\partial\alpha}\times\left\{\sum_k\frac{\tanh\left(\frac{\beta(E_k+\gamma m_k)}{2}\right)}{2E_k}+\frac{\tanh\left(\frac{\beta(E_k-\gamma m_k)}{2}\right)}{2E_k}-\frac{2}{G}\right\} \quad (۲۰)$$

[17] Isothermal probability distribution function

$$E=\sum_k \varepsilon_k-\sum_k \varepsilon_k \frac{\varepsilon_k-\lambda}{2E_k}\left\{\tanh\left(\frac{\beta(E_k+\gamma m_k)}{2}\right)+\tanh\left(\frac{\beta(E_k-\gamma m_k)}{2}\right)\right\}+\left(\bar{\Delta}^2+\beta\bar{\Delta}\frac{\partial\bar{\Delta}}{\partial\beta}\right)\times\left\{\sum_k\frac{\tanh\left(\frac{\beta(E_k+\gamma m_k)}{2}\right)}{2E_k}+\frac{\tanh\left(\frac{\beta(E_k-\gamma m_k)}{2}\right)}{2E_k}-\frac{2}{G}\right\}-\frac{\bar{\Delta}^2}{G} \quad (21)$$

$$M=\sum_k\left\{\frac{m_k}{1+\exp(\beta(E_k-\gamma m_k))}-\frac{m_k}{1+\exp(\beta(E_k+\gamma m_k))}\right\}+\beta\bar{\Delta}\frac{\partial\bar{\Delta}}{\partial\mu}\times\left\{\sum_k\frac{\tanh\left(\frac{\beta(E_k+\gamma m_k)}{2}\right)}{2E_k}+\frac{\tanh\left(\frac{\beta(E_k-\gamma m_k)}{2}\right)}{2E_k}-\frac{2}{G}\right\} \quad (22)$$

$$S=\sum_k\ln\left(1+\exp(-\beta(E_k+\gamma m_k))\right)+\sum_k\ln\left(1+\exp(-\beta(E_k-\gamma m_k))\right)+\sum_k\left\{\frac{\beta(E_k+\gamma m_k)}{1+\exp(\beta(E_k+\gamma m_k))}+\frac{\beta(E_k-\gamma m_k)}{1+\exp(\beta(E_k-\gamma m_k))}\right\}+\beta^2\bar{\Delta}\left(\lambda\frac{\partial\bar{\Delta}}{\partial\alpha}+\frac{\partial\bar{\Delta}}{\partial\beta}+\gamma\frac{\partial\bar{\Delta}}{\partial\mu}\right)\times\left\{\frac{2}{G}-\sum_k\frac{\tanh\left(\frac{\beta(E_k+\gamma m_k)}{2}\right)}{2E_k}+\frac{\tanh\left(\frac{\beta(E_k-\gamma m_k)}{2}\right)}{2E_k}\right\}+\beta^2\bar{\Delta}\left(\lambda\frac{\partial\bar{\Delta}}{\partial\alpha}+\frac{\partial\bar{\Delta}}{\partial\beta}+\gamma\frac{\partial\bar{\Delta}}{\partial\mu}\right)\times\sum_k\left[\frac{\sec h^2\left(\frac{\beta(E_k+\gamma m_k)}{2}\right)}{2E_k}\left(\frac{(E_k+\gamma m_k)}{2}+\frac{\beta}{2}\frac{\bar{\Delta}}{E_k}\frac{d\bar{\Delta}}{d\beta}\right)+\frac{\sec h^2\left(\frac{\beta(E_k-\gamma m_k)}{2}\right)}{2E_k}\left(\frac{(E_k-\gamma m_k)}{2}+\frac{\beta}{2}\frac{\bar{\Delta}}{E_k}\frac{d\bar{\Delta}}{d\beta}\right)-\frac{\bar{\Delta}}{2E_k^2}\frac{d\bar{\Delta}}{d\beta}\left\{\tanh\left(\frac{\beta(E_k+\gamma m_k)}{2}\right)+\tanh\left(\frac{\beta(E_k-\gamma m_k)}{2}\right)\right\}\right] \quad (24)$$

$$C=\frac{1}{4}\sum_k\sec h^2\left(\frac{\beta(E_k+\gamma m_k)}{2}\right)\times\left[\beta^2(E_k+\gamma m_k)^2+\beta^2(E_k+\gamma m_k)\frac{\bar{\Delta}}{E_k}\frac{d\bar{\Delta}}{d\beta}\right]+\frac{1}{4}\sum_k\sec h^2\left(\frac{\beta(E_k-\gamma m_k)}{2}\right)\times\left[\beta^2(E_k-\gamma m_k)^2+\beta^2(E_k-\gamma m_k)\frac{\bar{\Delta}}{E_k}\frac{d\bar{\Delta}}{d\beta}\right]-\beta\left(2\beta\bar{\Delta}\lambda\frac{\partial\bar{\Delta}}{\partial\alpha}+\beta^2\lambda\frac{d\bar{\Delta}}{d\beta}\frac{\partial\bar{\Delta}}{\partial\alpha}+\beta^2\lambda\bar{\Delta}\frac{d}{d\beta}\frac{\partial\bar{\Delta}}{\partial\alpha}+2\beta\bar{\Delta}\gamma\frac{\partial\bar{\Delta}}{\partial\mu}+\beta^2\gamma\frac{d\bar{\Delta}}{d\beta}\frac{\partial\bar{\Delta}}{\partial\mu}+\beta^2\gamma\bar{\Delta}\frac{d}{d\beta}\frac{\partial\bar{\Delta}}{\partial\mu}+2\beta\bar{\Delta}\frac{\partial\bar{\Delta}}{\partial\beta}+\beta^2\frac{d\bar{\Delta}}{d\beta}\frac{\partial\bar{\Delta}}{\partial\beta}+\beta^2\bar{\Delta}\frac{d}{d\beta}\frac{\partial\bar{\Delta}}{\partial\beta}\right)\times\left\{\frac{2}{G}-\sum_k\frac{\tanh\left(\frac{\beta(E_k+\gamma m_k)}{2}\right)}{2E_k}+\frac{\tanh\left(\frac{\beta(E_k-\gamma m_k)}{2}\right)}{2E_k}\right\}+\beta^2\bar{\Delta}\left(\lambda\frac{\partial\bar{\Delta}}{\partial\alpha}+\frac{\partial\bar{\Delta}}{\partial\beta}+\gamma\frac{\partial\bar{\Delta}}{\partial\mu}\right)\times\sum_k\left[\frac{\sec h^2\left(\frac{\beta(E_k+\gamma m_k)}{2}\right)}{2E_k}\left(\frac{(E_k+\gamma m_k)}{2}+\frac{\beta}{2}\frac{\bar{\Delta}}{E_k}\frac{d\bar{\Delta}}{d\beta}\right)+\frac{\sec h^2\left(\frac{\beta(E_k-\gamma m_k)}{2}\right)}{2E_k}\left(\frac{(E_k-\gamma m_k)}{2}+\frac{\beta}{2}\frac{\bar{\Delta}}{E_k}\frac{d\bar{\Delta}}{d\beta}\right)-\frac{\bar{\Delta}}{2E_k^2}\frac{d\bar{\Delta}}{d\beta}\left\{\tanh\left(\frac{\beta(E_k+\gamma m_k)}{2}\right)+\tanh\left(\frac{\beta(E_k-\gamma m_k)}{2}\right)\right\}\right] \quad (23)$$

مشتقات جزیی پارامتر گاف متوسط و مشتقات جزیی تابع پارش بزرگ از مرجع [۲۷] اخذ شده‌اند.

در این مقاله، هسته مانند دو سیستم مجزای نوترونی و پروتونی در نظر گرفته شده است [۳۰]. بنابراین کمیت‌های ترمودینامیکی مانند تابع پارش کل، انرژی برانگیختگی کل، تصویر تکانه زاویه‌ای کل روی محور Z، آنتروپی کل و ظرفیت گرمایی کل به صورت حاصل جمع قسمت نوترونی و پروتونی می‌باشند:

$$\Omega=\Omega_n+\Omega_p,\quad E=E_n+E_p,\quad M=M_n+M_p$$
$$S=S_n+S_p,\quad C=C_n+C_p \qquad (۱۵)$$

چگالی‌تراز هسته‌ای (ρ) را می‌توان از رابطه زیر به دست آورد [۱]:

$$\rho(E,M)=\frac{exp(S)}{(۲\pi)^{۲}}\frac{۱}{\sqrt{D}} \qquad (۱۶)$$

در رابطه بالا، S آنتروپی کل سیستم و D دترمینانی شامل مشتقات مرتبه دوم تابع پارش بزرگ در نقطه زینی[18] است. برای مثال، برای سیستم پروتونی، دترمینان D را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$D_p=\begin{vmatrix} \frac{\partial^{۲}\Omega}{\partial\alpha_p^{۲}} & \frac{\partial^{۲}\Omega}{\partial\alpha_p\partial\beta} & \frac{\partial^{۲}\Omega}{\partial\alpha_p\partial\mu} \\ \frac{\partial^{۲}\Omega}{\partial\beta\partial\alpha_p} & \frac{\partial^{۲}\Omega}{\partial\beta^{۲}} & \frac{\partial^{۲}\Omega}{\partial\beta\partial\mu} \\ \frac{\partial^{۲}\Omega}{\partial\mu\partial\alpha_p} & \frac{\partial^{۲}\Omega}{\partial\mu\partial\beta} & \frac{\partial^{۲}\Omega}{\partial\mu^{۲}} \end{vmatrix} \qquad (۱۷)$$

برای به دست آوردن دترمینان D برای سیستم نوترونی تنها کافی است که در رابطه بالا به جای α_p، α_n را قرار دهیم. در نتیجه، به رابطه زیر می‌رسیم:

$$D=\frac{\partial^{۲}\Omega}{\partial\alpha_n^{۲}}D_p+\frac{\partial^{۲}\Omega}{\partial\alpha_p^{۲}}D_n \qquad (۱۸)$$

مشتقات مرتبه دوم تابع پارش بزرگ از مرجع [۲۷] اخذ شده‌اند.

برای محاسبه چگالی‌تراز هسته‌ای در یک تکانه زاویه‌ای خاص، J، از رابطه زیر استفاده می‌شود [۱]:

$$\rho(E,J)=\rho(E,J=M)-\rho(E,J=M+۱) \qquad (۱۹)$$

که در رابطه بالا، $\rho(E,J=M)$ و $\rho(E,J=M+1)$ از قرار دادن آنتروپی (S) و دترمینان D مربوط به هر تصویر تکانه زاویه‌ای متناسب با $J=M$ و $J=M+۱$ در رابطه (۱۶) به دست می‌آیند.

۲- محاسبات و نتایج

در این مقاله، از مدل نیلسون[19] برای محاسبه انرژی ترازهای تک‌ذره‌ای استفاده شده است [۳۱]. پارامتر تغییر شکل ($\beta_۲$) ناشی از تغییر شکل هسته و دور بودن از پوسته بسته و شکل کروی در مدل نیلسون برای هسته‌های ^{۱۴۶}Nd و ^{۱۴۷}Nd به ترتیب برابر با ۰٫۱۵۱ و ۰٫۱۷۶ قرار داده شده است. علاوه براین، پارامترهای در نظر گرفته شده مربوط به جملات غیرمرکزی در مدل نیلسون (برهمکنش اسپین- مدار، چرخش هسته و غیره) برای سیستم‌های نوترونی و پروتونی هسته‌های ^{۱۴۶}Nd و ^{۱۴۷}Nd در جدول ۱ ارائه شده‌اند. [۳۱].

جدول ۱: پارامترهای در نظر گرفته شده در مدل نیلسون برای هسته‌های $^{۱۴۶-۱۴۷}$Nd.

	k_n	μ_n	k_p	μ_p
^{۱۴۶}Nd	۰٫۰۶۳۷۲۰۴	۰٫۴۴۳۸۳۶	۰٫۰۶۵۲۲۶۶	۰٫۵۸۷۷۵۴
^{۱۴۷}Nd	۰٫۰۶۳۷۱۷۸	۰٫۴۴۲۶۰۲	۰٫۶۵۱۴۷۸	۰٫۵۸۸۴۰۳

همچنین برای انجام محاسبات نیاز به مقدار پارامتر گاف در دمای صفر داریم که برای سیستم‌های نوترونی و پروتونی از مرجع [۲۹] اخذ شده و در جدول ۲ ارائه شده است. اختلاف اندک بین پارامتر گاف نوترونی و پروتونی در دمای صفر به دلیل اثر زوجیت می‌باشد.

[19] Nilsson model

جدول ۲: پارامتر گاف پروتونی و نوترونی در دمای صفر برای هسته‌های $^{146-147}$Nd [۲۹]. مقادیر بر حسب MeV هستند.

	$\Delta_p^{(\cdot)}$	$\Delta_n^{(\cdot)}$
^{146}Nd	۱٫۳۲	۱٫۰۵
^{147}Nd	۱٫۱۰	۱٫۰۸

در این پژوهش، محاسبات به شرح زیر انجام گرفته است:

۱- در ابتدا با قرار دادن مقدار پارامتر گاف در دمای صفر در رابطه (۱۰) و حل همزمان آن با معادله تعداد ذرات (۱۱)، قدرت برهمکنش، G و پتانسیل شیمیایی، λ را در دمای صفر محاسبه می‌کنیم. این محاسبات برای سیستم پروتونی و نوترونی باید به طور جداگانه انجام شود. لازم به ذکر است که فرکانس دورانی، γ، در این مرحله صفر در نظر گرفته می‌شود. مقدار G در تمام محاسبات انجام گرفته ثابت در نظر گرفته شده است.

۲- سپس برای به دست آوردن پتانسیل شیمیایی و پارامتر گاف در هر روش در دماهای بالاتر، معادلات (۱۰) یا (۱۹) را به صورت همزمان با معادله تعداد ذرات در همان روش، معادله (۱۱) یا (۲۰) در هر تکانه زاویه‌ای حل می‌کنیم. لازم به ذکر است که فرکانس دورانی در معادله (۱۳) یا (۲۲) به گونه‌ای قرار داده می‌شود که مقدار تصویر تکانه زاویه‌ای مورد نظر استفاده شده در محاسبات به دست آید.

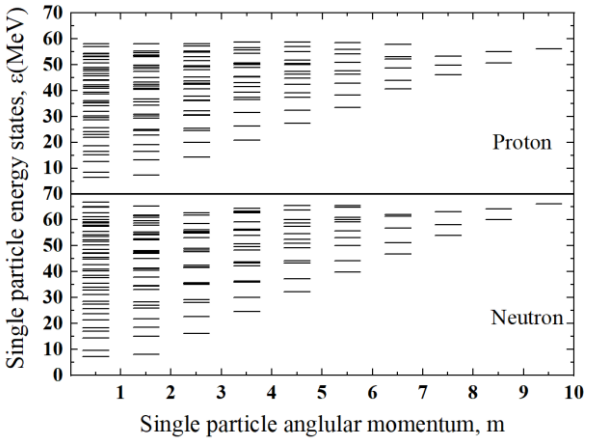
۳- در انتها با قرار دادن پتانسیل شیمیایی و پارامتر گاف به دست آمده در معادلات موجود انرژی برانگیختگی، آنتروپی، ظرفیت گرمایی و چگالی‌تراز هسته‌ای سیستم را در هر دما و در تکانه‌های زاویه‌ای مختلف در دو مدل BCS و MEGBCS محاسبه می‌کنیم.

مقادیر قدرت برهمکنش (G) نوترونی و پروتونی به دست آمده برای هسته‌های ^{146}Nd و ^{147}Nd همراه با مقادیر دمای بحرانی نوترونی و پروتونی به دست آمده در تکانه زاویه‌ای $M=0\,\hbar$ تا $M=12\,\hbar$ در جدول ۳ ارائه شده‌اند. دمای بحرانی برای تکانه‌های زاویه‌ای $M=16\,\hbar$ و $M=20\,\hbar$ به دلیل پدیده بازگشت گرمایی همبستگی جفت‌شدگی برای هر دو سیستم پروتونی و نوترونی وجود ندارد.

جدول ۳: قدرت برهمکنش نوترونی و پروتونی به همراه دمای بحرانی نوترونی و پروتونی برای هسته‌های $^{146-147}$Nd. مقادیر بر حسب MeV هستند.

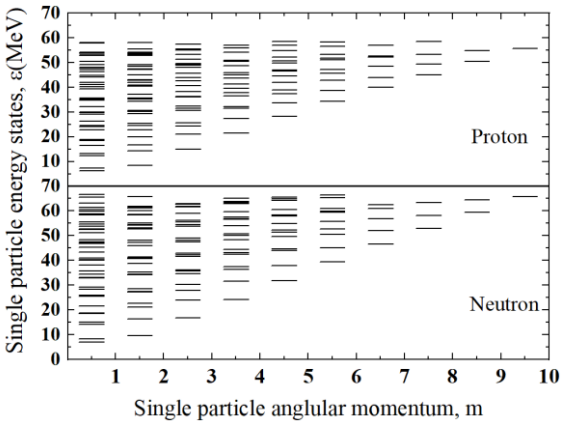
	M	G_n	G_p	T_{cn}	T_{cp}
^{146}Nd	$0\,\hbar$	۰٫۰۹۷۴۲	۰٫۱۰۴۷۲	۰٫۶۲	۰٫۷۴
^{147}Nd	$0\,\hbar$	۰٫۰۹۶۲۶	۰٫۱۰۰۰۸	۰٫۶۲	۰٫۶۱
^{146}Nd	$4\,\hbar$	۰٫۰۹۷۴۲	۰٫۱۰۴۷۲	۰٫۵۴	۰٫۶۸
^{147}Nd	$4\,\hbar$	۰٫۰۹۶۲۶	۰٫۱۰۰۰۸	۰٫۵۷	۰٫۵۷
^{146}Nd	$8\,\hbar$	۰٫۰۹۷۴۲	۰٫۱۰۴۷۲	۰٫۳۸	۰٫۴۶
^{147}Nd	$8\,\hbar$	۰٫۰۹۶۲۶	۰٫۱۰۰۰۸	۰٫۴۴	۰٫۳۹
^{146}Nd	$12\,\hbar$	۰٫۰۹۷۴۲	۰٫۱۰۴۷۲	۰٫۰۷	-
^{147}Nd	$12\,\hbar$	۰٫۰۹۶۲۶	۰٫۱۰۰۰۸	۰٫۱۷	-

شکل‌های ۱ و ۲ به ترتیب ترازهای انرژی تک‌ذره‌ای پروتونی و نوترونی محاسبه شده در مدل نیلسون بر حسب اسپین برای هسته‌های ^{146}Nd و ^{147}Nd را نشان می‌دهند.



شکل ۱: ترازهای انرژی تک‌ذره‌ای پروتونی و نوترونی بر حسب اسپین برای هسته ^{146}Nd.

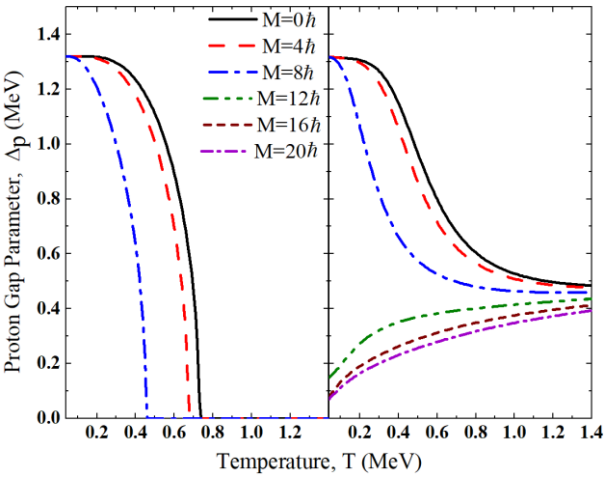
پارامتر گاف پروتونی و نوترونی بر حسب دما در تکانه‌های زاویه‌ای $M=0\hbar$ تا $M=20\hbar$ برای هسته‌های ^{146}Nd و ^{147}Nd محاسبه شده و به ترتیب در شکل‌های ۳ تا ۶ رسم شده‌اند. نتایج حاصل از مدل BCS نیز برای مقایسه بهتر ارائه شده‌اند. همانطور که مشاهده می‌شود در مدل MEGBCS که افت و خیزهای گرمایی را در نظر می‌گیرد، پارامتر گاف در دمای بحرانی، دمایی که در آن پارامتر گاف در ابررسانا (مدل BCS) به طور ناگهانی صفر می‌شود، صفر نمی‌شود و در تکانه‌های زاویه‌ای $M=0\hbar$ تا $M=8\hbar$ برای سیستم‌های پروتونی و نوترونی در هسته ^{146}Nd و $M=0\hbar$ تا $M=8\hbar$ برای سیستم پروتونی و $M=0\hbar$ تا $M=12\hbar$ برای سیستم نوترونی در هسته ^{147}Nd با افزایش دما کاهش یافته و به مقدار تقریبا ثابتی می‌رسد.



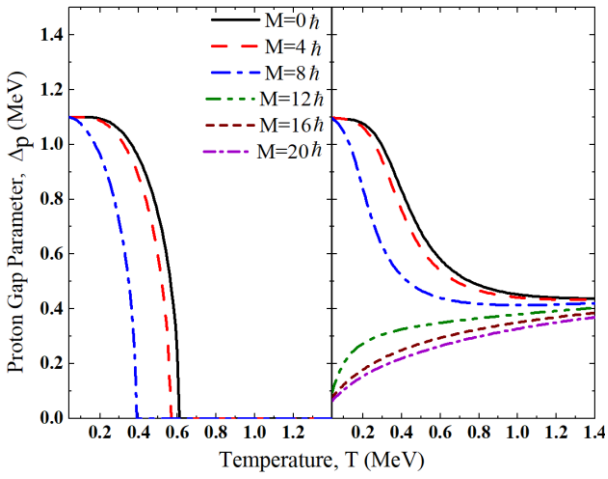
شکل ۲: ترازهای انرژی تک‌ذره‌ای پروتونی و نوترونی بر حسب اسپین برای هسته ^{147}Nd.

علت این پدیده این است که وقتی دما افزایش می‌یابد انرژی مورد نیاز جهت شکستن جفت‌های نوکلئونی فراهم شده و موجب تولید شبه ذرات می‌شود. شبه ذرات تولید شده مانع اشغال سطوح نزدیک سطح فرمی شده و باعث می‌شوند این سطوح برای پراکندگی جفت‌های نوکلئونی دیگر غیر قابل دسترس شوند و در نتیجه جفت‌شدگی کاهش پیدا می‌کند. همچنین پارامتر گاف با افزایش تکانه زاویه‌ای کاهش پیدا می‌کند. افزایش تکانه زاویه‌ای نیز اثری مانند دما دارد و انرژی لازم برای شکسته شدن جفت‌های نوکلئونی را فراهم می‌کند و در نتیجه جفت‌شدگی (پارامتر گاف) کاهش می‌یابد. پارامتر گاف پروتونی و نوترونی در هسته ^{146}Nd در تکانه زاویه‌ای $M=12\hbar$ تا $M=20\hbar$ و پارامتر گاف پروتونی در تکانه زاویه‌ای $M=12\hbar$ تا $M=20\hbar$ و پارامتر گاف نوترونی در تکانه زاویه‌ای $M=16\hbar$ تا $M=20\hbar$ در هسته ^{147}Nd با افزایش دما افزایش پیدا می‌کند که به این پدیده، بازگشت گرمایی همبستگی جفت‌شدگی[20] می‌گویند. در این حالت برخلاف حالت عادی با افزایش دمای هسته میزان جفت‌شدگی در هسته نیز افزایش می‌یابد. برای توصیف بازگشت گرمایی همبستگی جفت‌شدگی، هسته را در دمای کوچک و تکانه زاویه‌ای بزرگ در نظر می گیریم. در این حالت شبه ذرات تولید شده به دلیل شکستن جفت‌های کوپر ناشی از تاثیر تکانه زاویه‌ای بالا، سطوح نزدیک سطح فرمی را اشغال می کنند و در نتیجه این سطوح، برای جفت‌های دیگر غیر قابل دسترس می‌گردند و جفت‌شدگی کاهش می‌یابد. افزایش دما در این حالت باعث پخش شدگی این شبه ذرات از اطراف سطح فرمی می‌شود و آن‌ها را دورتر از سطح فرمی پخش می‌کند. بنابراین برخی از سطوح نزدیک سطح فرمی به طور جزئی خالی می‌شوند و برای پراکندگی جفت‌های نوکلئونی دیگر در دسترس قرار می‌گیرند. بنابراین، با افزایش دما جفت‌شدگی افزایش می‌یابد و در دمای ۰٫۶–۰٫۸ MeV به یک مقدار ثابت میل می‌کند. همانطور که ملاحظه می‌شود پدیده بازگشت گرمایی همبستگی جفت‌شدگی در مدل BCS مشاهده نمی‌شود.

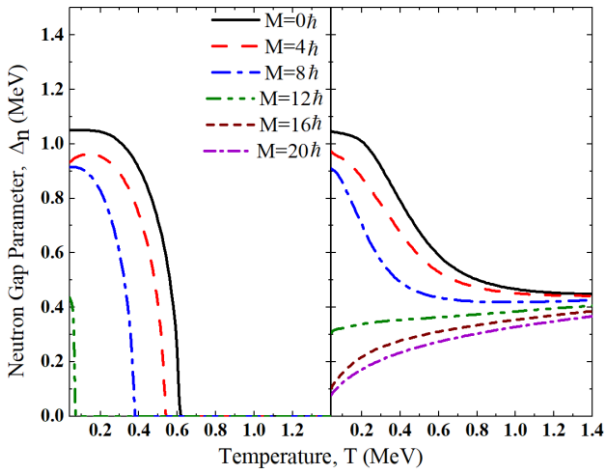
[20] Thermally assisted pairing correlation



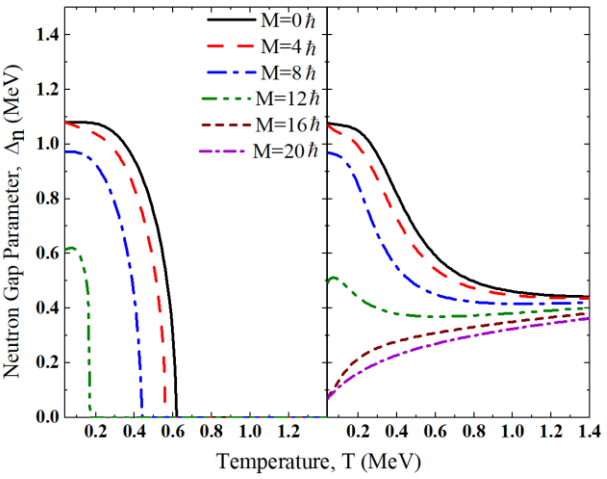
شکل ۳: پارامتر گاف پروتونی بر حسب دما در تکانه‌های زاویه‌ای مختلف برای هسته ^{146}Nd. سمت چپ: مدل BCS؛ سمت راست: مدل MEGBCS.



شکل ۵: پارامتر گاف پروتونی بر حسب دما در تکانه‌های زاویه‌ای مختلف برای هسته ^{147}Nd. سمت چپ: مدل BCS؛ سمت راست: مدل MEGBCS.



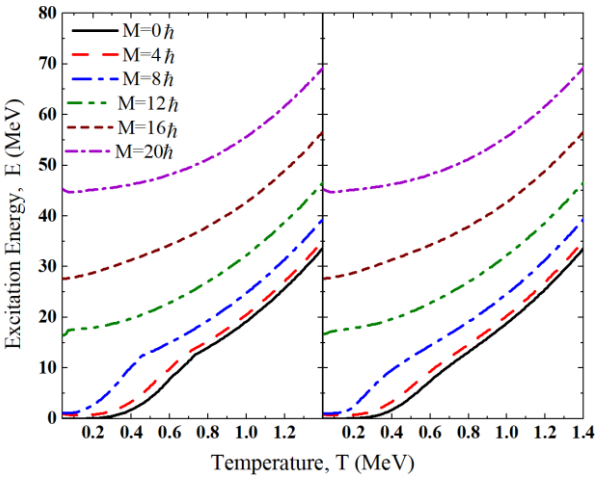
شکل ۴: پارامتر گاف نوترونی بر حسب دما در تکانه‌های زاویه‌ای مختلف برای هسته ^{146}Nd. سمت چپ: مدل BCS؛ سمت راست: مدل MEGBCS.



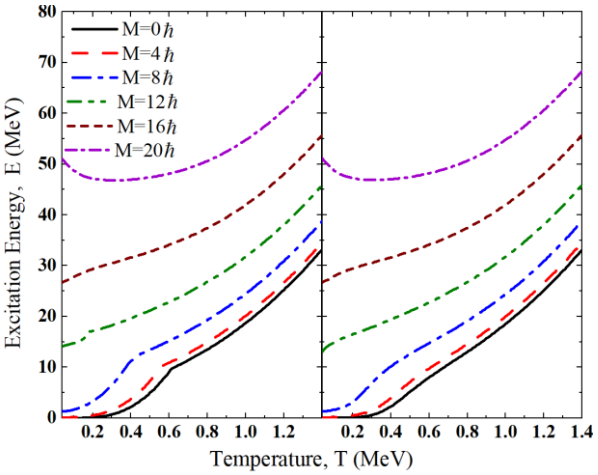
شکل ۶: پارامتر گاف نوترونی بر حسب دما در تکانه‌های زاویه‌ای مختلف برای هسته ^{147}Nd. سمت چپ: مدل BCS؛ سمت راست: مدل MEGBCS.

انرژی برانگیختگی محاسبه شده با استفاده از روابط (۱۲) (مدل BCS) و (۲۱) (مدل MEGBCS) برای هسته‌های ^{146}Nd و ^{147}Nd بر حسب دما در تکانه‌های زاویه‌ای $M=0\hbar$ تا $M=20\hbar$ به ترتیب در شکل‌های ۷ و ۸ در نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که مدل BCS اطراف دمای بحرانی یک خمیدگی را پیش‌بینی می‌کند که ناشی از کاهش سریع پارامتر گاف در سیستم‌های نوکلئونی در دمای بحرانی می‌باشد. اما

استفاده از مقدار متوسط پارامتر گاف در مدل MEGBCS منجر به رفتار هموار انرژی برانگیختگی اطراف دمای بحرانی گردیده است. همچنین در هر تکانه زاویه‌ای انرژی برانگیختگی با افزایش دما زیاد می‌شود. وقتی که دمای یک هسته افزایش می‌یابد، انرژی جنبشی اجزای سازنده آن (پروتون‌ها و نوترون‌ها) نیز افزایش می‌یابد و ممکن است نوکلئون‌ها به حالت‌های انرژی یا حالت‌های برانگیخته بالاتری گذار پیدا کنند که در نتیجه انرژی برانگیختگی کل هسته نیز افزایش پیدا می‌کند. همچنین می‌توان دید که با افزایش تکانه زاویه‌ای انرژی برانگیختگی هسته افزایش می‌یابد. افزایش تکانه زاویه‌ای موجب شکسته شدن جفت‌های نوکلئونی بیشتری شده و در نتیجه نوکلئون‌های بیشتری می‌توانند به حالت‌های برانگیخته بالاتری گذار پیدا کنند که باعث افزایش انرژی برانگیختگی هسته می‌شود. در تکانه‌های زاویه‌ای $M = ۱۲\,\hbar$ تا $M = ۲۰\,\hbar$ جفت‌شدگی مجدد نوکلئون‌ها ناشی از پدیده بازگشت گرمایی همبستگی جفت‌شدگی نیز بر تغییر انرژی برانگیختگی بر حسب دما تاثیر می‌گذارد.



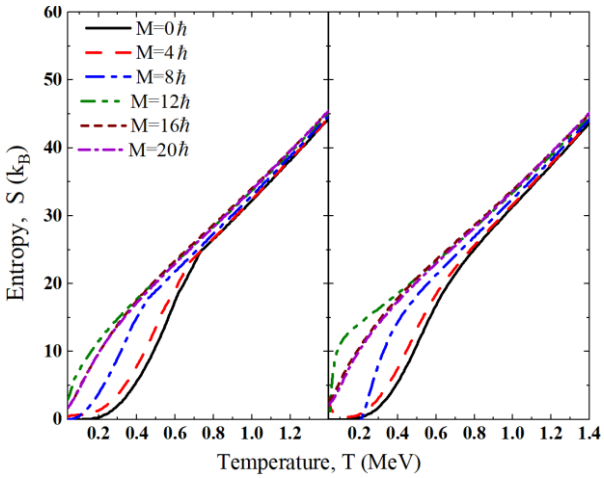
شکل ۷: انرژی برانگیختگی بر حسب دما در تکانه‌های زاویه‌ای مختلف برای هسته ^{۱۴۶}Nd. سمت چپ: مدل BCS؛ سمت راست: مدل MEGBCS.



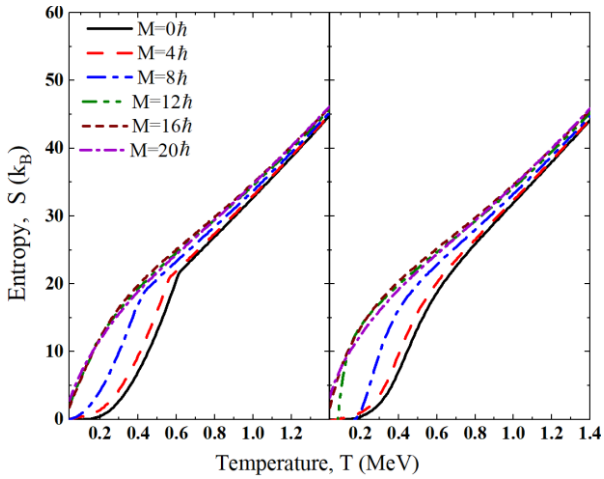
شکل ۸: انرژی برانگیختگی بر حسب دما در تکانه‌های زاویه‌ای مختلف برای هسته ^{۱۴۷}Nd. سمت چپ: مدل BCS؛ سمت راست: مدل MEGBCS.

به ترتیب در شکل‌های ۹ و ۱۰ محاسبات مربوط به آنتروپی سیستم برحسب دما در تکانه‌های زاویه‌ای $M = ۰\,\hbar$ تا $M = ۲۰\,\hbar$ برای هسته‌های ^{۱۴۶}Nd و ^{۱۴۷}Nd با استفاده از روابط (۱۴) (مدل BCS) و (۲۳) (مدل MEGBCS) رسم شده‌اند. در این مورد نیز نتایج مدل MEGBCS اطراف دمای بحرانی برخلاف نتایج مدل BCS دارای خمیدگی نیست بلکه رفتار همواری از خود نشان می‌دهد. از نمودارها مشاهده می‌شود که در هر تکانه زاویه‌ای آنتروپی با افزایش دما افزایش پیدا می‌کند. آنتروپی معیاری از بی نظمی در سیستم است. افزایش دما منجر به افزایش انرژی حرارتی نوکلئون‌ها شده و باعث می‌شود که انرژی جنبشی نوکلئون‌ها زیاد شود. نوکلئون‌ها در اثر این انرژی جنبشی می‌توانند به ترازهای انرژی بالاتری بروند که این موضوع منجر به تعداد حالت‌های کوانتومی در دسترس بیشتر و در نتیجه بی نظمی بیشتری شده و آنتروپی افزایش می‌یابد. همچنین از شکل‌ها می‌توان مشاهده کرد که با افزایش تکانه زاویه‌ای آنتروپی نیز افزایش می‌یابد. می‌توان این طور تفسیر کرد که با افزایش تکانه زاویه‌ای انرژی دورانی هسته نیز افزایش می‌یابد و هسته می‌تواند تعداد بیشتری از ترازهای انرژی مربوط به پیکربندی‌های دورانی مختلف را اشغال کند. افزایش در تعداد حالت‌های انرژی

در دسترس منجر به افزایش بی نظمی در هسته شده که در نتیجه آن آنتروپی نیز زیاد می‌شود. در تکانه‌های زاویه‌ای بالا جفت‌شدگی مجدد نوکلئون‌ها ناشی از پدیده بازگشت گرمایی همبستگی جفت‌شدگی نیز بر تغییر آنتروپی بر حسب دما تاثیر می‌گذارد. در دماهای بالا که پارامتر گاف در تکانه‌های زاویه‌ای مختلف تقریبا ثابت است، آنتروپی به یک مقدار ثابت میل می‌کند.

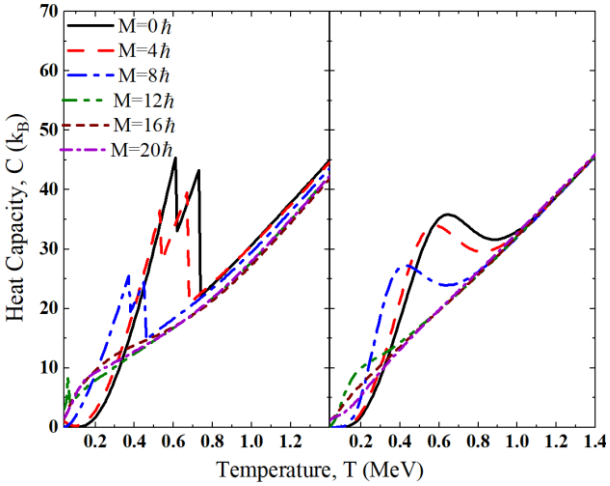


شکل ۹: آنتروپی بر حسب دما در تکانه‌های زاویه‌ای مختلف برای هسته ^{146}Nd. سمت چپ: مدل BCS؛ سمت راست: مدل MEGBCS. k_B ثابت بولتزمن می‌باشد.

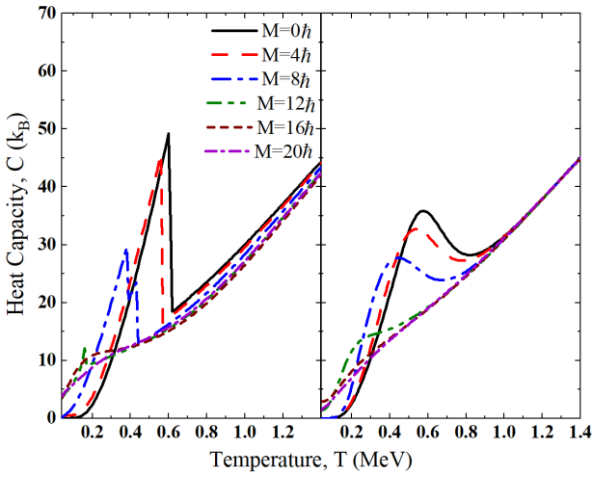


شکل ۱۰: آنتروپی بر حسب دما در تکانه‌های زاویه‌ای مختلف برای هسته ^{147}Nd. سمت چپ: مدل BCS؛ سمت راست: مدل MEGBCS. k_B ثابت بولتزمن می‌باشد.

ظرفیت گرمایی هسته‌های ^{146}Nd و ^{147}Nd بر حسب دما در تکانه‌های زاویه‌ای $M=0\hbar$ تا $M=20\hbar$ با استفاده از روابط (۱۵) (مدل BCS) و (۲۴) (مدل MEGBCS) محاسبه شده و به ترتیب در شکل‌های ۱۱ و ۱۲ نشان داده شده است. بر خلاف مدل BCS که یک گذار فاز ناگهانی را نزدیک دمای بحرانی برای هسته پیش‌بینی می‌کند، نتایج حاصل از مدل MEGBCS که افت و خیزهای گرمایی را در نظر می‌گیرد یک ظرفیت گرمایی S شکل را اطراف دمای بحرانی نشان می‌دهند. وجود دو شکستگی در نمودار ظرفیت گرمایی کل بر حسب دما در مدل BCS ناشی از تفاوت در دمای بحرانی سیستم‌های نوترونی و پروتونی می‌باشد. ناپیوستگی موجود در گذار فاز جفت‌شدگی در مدل BCS ناشی از صفر شدن ناگهانی پارامتر گاف اطراف دمای بحرانی می‌باشد. تفاوت اصلی دو مدل به دلیل در نظر گرفتن افت و خیزهای گرمایی در مدل MEGBCS می باشد که باعث هموار شدن گذار فاز جفت‌شدگی در هسته‌ها می‌شود. قله مشاهده شده در ظرفیت گرمایی در مدل MEGBCS را می‌توان به عنوان گذار فاز از حالت جفت‌شده به حالت نرمال یا به عبارت دیگر به عنوان نشانه‌ای از گذار فاز جفت‌شدگی گرمایی تعبیر کرد. همچنین قله در ظرفیت گرمایی با افزایش تکانه زاویه‌ای به سمت دمای کمتر می‌رود که نشان دهنده این است که دمای تغییر فاز هسته با افزایش تکانه زاویه‌ای کاهش پیدا می‌کند. به علاوه، با افزایش تکانه زاویه‌ای حالت S شکل ظرفیت گرمایی در حال محو شدن است به این دلیل که در تکانه‌های زاویه‌ای بالا که در آن پدیده بازگشت گرمایی همبستگی جفت‌شدگی رخ می‌دهد، جفت‌شدگی با افزایش دما به طور قابل توجهی تغییر نمی‌کند. در دماهای بالا که جفت‌شدگی در تکانه‌های زاویه‌ای مختلف تقریبا ثابت است، ظرفیت گرمایی به مقدار تقریبا یکسانی میل می‌کند.

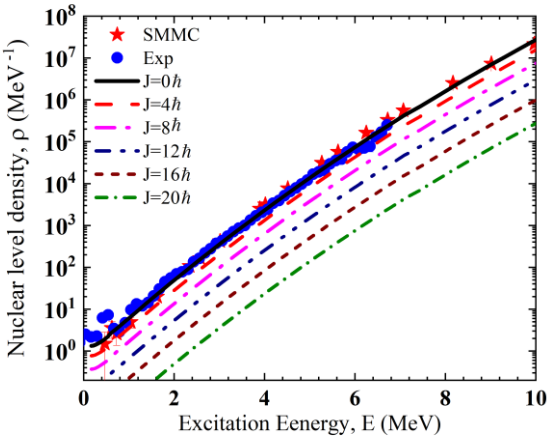


شکل ۱۱: ظرفیت گرمایی بر حسب دما در تکانه‌های زاویه‌ای مختلف برای هسته ^{146}Nd. سمت چپ: مدل BCS؛ سمت راست: مدل MEGBCS. k_B ثابت بولتزمن می‌باشد.

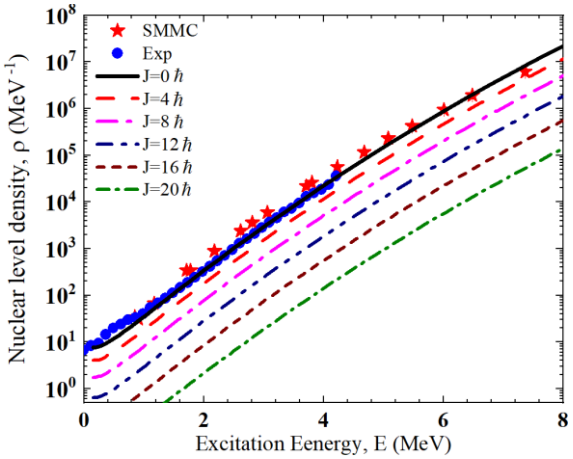


شکل ۱۲: ظرفیت گرمایی بر حسب دما در تکانه‌های زاویه‌ای مختلف برای هسته ^{147}Nd. سمت چپ: مدل BCS؛ سمت راست: مدل MEGBCS. k_B ثابت بولتزمن می‌باشد.

چگالی‌تراز هسته‌ای بر حسب انرژی برانگیختگی در تکانه‌های زاویه‌ای کل $J=0-20\ \hbar$ برای هسته‌های ^{146}Nd و ^{147}Nd با استفاده از رابطه (۱۹) محاسبه شده و به ترتیب در شکل‌های ۱۳ و ۱۴ رسم شده است. چگالی تراز هسته‌ای به دست آمده از داده‌های تجربی و مدل پوسته‌ای مونت کارلو (SMMC) اخذ شده از مرجع [۲۵] نیز برای مقایسه رسم شده‌اند. چگالی تراز هسته‌ای محاسبه شده در مدل MEGBCS در تکانه زاویه‌ای $J=0\ \hbar$ در هر دو هسته ^{146}Nd و ^{147}Nd تطابق خوبی با داده‌های تجربی و مدل SMMC دارد. لازم به ذکر است که داده‌های تجربی چگالی تراز هسته‌ای و مدل SMMC در مرجع [۲۵] در تکانه زاویه‌ای $J=0\ \hbar$ به دست آمده‌اند.



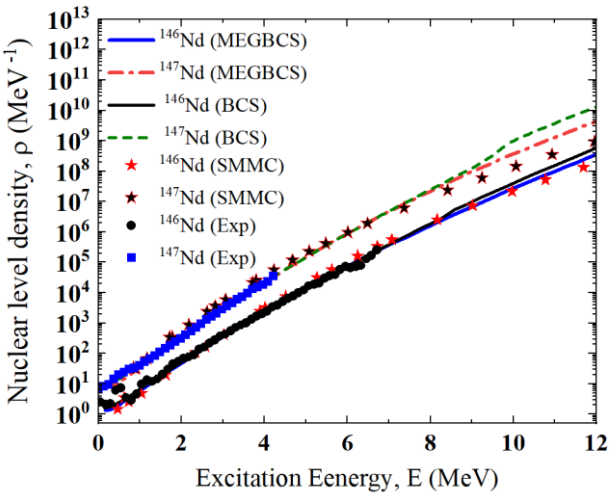
شکل ۱۳: چگالی تراز هسته‌ای بر حسب انرژی برانگیختگی در تکانه‌های زاویه‌ای مختلف برای هسته ^{146}Nd. داده‌های تجربی و نتایج مدل SMMC از مرجع [۲۵] اخذ شده‌اند.



شکل ۱۴: چگالی تراز هسته‌ای بر حسب انرژی برانگیختگی در تکانه‌های زاویه‌ای مختلف برای هسته ^{147}Nd. داده‌های تجربی و نتایج مدل SMMC از مرجع [۲۵] اخذ شده‌اند.

برای مقایسه بهتر، چگالی‌تراز هسته‌ای هسته‌های ^{146}Nd و ^{147}Nd بر حسب انرژی برانگیختگی در تکانه زاویه‌ای $J=0\ \hbar$ در دو مدل BCS و MEGBCS محاسبه و در شکل ۱۵ رسم شده

است. داده‌های تجربی و نتایج مدل SMMC اخذ شده از مرجع [۲۵] نیز برای مقایسه رسم شده‌اند. همانطور که مشاهده شود در نظر گرفتن افت و خیزهای گرمایی باعث شده است که خمیدگی موجود در نمودار چگالی تراز هسته‌ای در روش BCS، که ناشی از نادیده گرفتن اثر افت و خیزهای گرمایی در سیستم‌های محدود مانند هسته است، از بین رفته و نمودار شکل هموارتری پیدا کند. همچنین مشاهده می‌شود که چگالی تراز هسته‌ای ^{147}Nd بیشتر از ^{146}Nd می‌باشد. می‌توان گفت که اثر زوج-فرد[21] مسئول چنین مشخصه‌ای در هسته‌ها است به طوری که چگالی تراز هسته‌های فرد معمولا بیشتر از چگالی تراز هسته‌های زوج مجاور آن‌ها می‌باشد. این رفتار می‌تواند به دلیل حضور یک نوکلئون فرد در هسته ^{147}Nd باشد. داده‌های تجربی و نتایج مدل SMMC نیز این موضوع را تایید می‌کنند.



شکل ۱۵: چگالی تراز هسته‌ای بر حسب انرژی برانگیختگی در تکانه زاویه‌ای $J=0\hbar$ در دو مدل BCS و MEGBCS برای هسته‌های ^{146}Nd و ^{147}Nd. داده‌های تجربی و نتایج مدل SMMC از مرجع [۲۵] اخذ شده‌اند.

۳- نتیجه گیری

در این پژوهش، کمیت‌های ترمودینامیکی ایزوتوپ‌های $^{146-147}$Nd در چارچوب مدل‌های BCS و MEGBCS در تصویر تکانه-های زاویه‌ای $M=0-20\hbar$ بر حسب دما محاسبه شده‌اند. همچنین چگالی تراز هسته‌ای این دو هسته بر حسب انرژی برانگیختگی در تکانه‌های زاویه‌ای کل $J=0-20\hbar$ محاسبه و با داده‌های تجربی و نتایج حاصل از مدل SMMC [۲۵] مقایسه شده‌اند.

نتایج محاسبات نشان دادند که پارامتر گاف در تکانه‌های زاویه‌ای $M=0\hbar$ تا $M=8\hbar$ برای سیستم‌های پروتونی و نوترونی در هسته ^{146}Nd و $M=0\hbar$ تا $M=8\hbar$ برای سیستم پروتونی و $M=0\hbar$ تا $M=12\hbar$ برای سیستم نوترونی در هسته ^{147}Nd با افزایش دما کاهش می‌یابد ولی صفر نمی‌شود بلکه به یک مقدار تقریبا ثابت میل می‌کند. همچنین با افزایش تکانه زاویه‌ای از $M=0\hbar$ تا $M=20\hbar$ پارامتر گاف نوترونی و پروتونی در هر دو هسته نیز کاهش پیدا می‌کند. در تکانه زاویه‌ای $M=12\hbar$ تا $M=20\hbar$ برای هسته ^{146}Nd و در تکانه زاویه‌ای $M=12\hbar$ تا $M=20\hbar$ در سیستم پروتونی و $M=16\hbar$ تا $M=20\hbar$ در سیستم نوترونی برای هسته ^{147}Nd پدیده بازگشت گرمایی همبستگی جفت‌شدگی رخ می‌دهد به طوری که در دمای پایین جفت‌شدگی با افزایش دما افزایش پیدا می‌کند و در دماهای بالا پارامتر گاف به یک مقدار تقریبا ثابت میل می‌کند.

انرژی برانگیختگی و آنتروپی نیز بر حسب دما در تکانه‌های زاویه‌ای مختلف برای ایزوتوپ‌های $^{146-147}$Nd در دو مدل BCS و MEGBCS محاسبه شده‌اند. علاوه بر اینکه انرژی برانگیختگی در هر تکانه زاویه‌ای با افزایش دما زیاد می‌شود، با افزایش تکانه زاویه‌ای نیز افزایش می‌یابد که به دلیل شکسته شدن جفت‌های نوکلئونی بیشتر و افزایش حالت‌های برانگیخته هسته می‌باشد. همچنین مشاهده شد که در دماهای پایین آنتروپی با افزایش تکانه زاویه‌ای افزایش می‌یابد و در دماهای بالا که پارامتر گاف به مقدار ثابتی میل می‌کند، آنتروپی در تکانه‌های زاویه‌ای مختلف تفاوت قابل توجهی ندارد.

[21] Odd-even effect

همچنین نتایج نشان دادند که در نظر گرفتن افت و خیزهای گرمایی منجر به یک ظرفیت گرمایی S شکل می‌شود که به عنوان گذار فاز جفت‌شدگی تفسیر می‌شود. همچنین مشاهده می‌شود که با افزایش تکانه زاویه‌ای دمای تغییر فاز هسته کاهش پیدا می‌کند و در تکانه‌های زاویه‌ای بالا این ساختار S شکل محو می‌شود. در دماهای بالا که جفت‌شدگی تقریبا ثابت است، ظرفیت گرمایی در تکانه‌های زاویه‌ای مختلف به مقدار تقریبا یکسانی میل می‌کند.

محاسبات چگالی تراز هسته‌ای بر حسب انرژی برانگیختگی در مدل MEGBCS تطابق خوبی با داده‌های تجربی و نتایج حاصل از مدل SMMC در تکانه زاویه‌ای $J = 0\,\hbar$ دارند. همچنین مشاهده شد که چگالی تراز هسته‌ای هسته ^{147}Nd بیشتر از چگالی تراز هسته ^{146}Nd است که دلیل این موضوع می‌تواند حضور یک نوکلئون فرد در هسته ^{147}Nd باشد.

منابع

[1] Z. Kargar and S. Afrookhteh, "Deformation dependence of thermal properties of hot rotating 184Re with inclusion of nuclear pairing fluctuations". Results in Physics, vol. 52, pp. 106899, 2023.

[2] K. Van Houcke, S. M. A. Rombouts, K. Heyde and Y. Alhassid, "Microscopic calculation of symmetry projected nuclear level densities", Physical Review C, vol. 79, no. 2, pp. 024302, 2009.

[3] A. N. Behkami and Z. Kargar, "Nuclear level densities and spin cut-off factors deduced from microscopic theory for nuclei from 20F to 244Am", Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics, vol. 18, no. 6, pp. 1023-1037, 1992.

[4] Z. Kargar, N. Ghahramani and A. Moradi, "Microscopic Study of Nuclear Level Densities and Thermal Properties in 56, 57Fe", Communications in Theoretical Physics, vol. 48, no. 3, pp. 531-533, 2007.

[5] A. N. Behkami and Z. Kargar, "Statistical treatment of nuclear level densities", Physica Scripta, vol. 66, no. 2, pp. 22-31, 2002.

[6] A. N. Behkami and Z. Kargar, "Nuclear Level Density at High Spin and Excitation Energy", Communications in Theoretical Physics, vol. 36, no. 3, pp. 305-312, 2001.

[7] J. R. Huizenga, A. N. Behkami, I. M. Govil, W. U. Schröder and J. Toke, "Influence of rotation-induced nuclear deformation on α-particle evaporation spectra", Physical Review C, vol. 40, no. 2, pp. 668, 1989.

[8] R. Rossignoli, N. Canosa and P. Ring, "Microscopic description of hot nuclei: the SPA+RPA approach", Nuclear Physics A, vol. 654, no. 1, pp. 719c-722c, 1999.

[9] K. Kaneko and A. Schiller, "Particle-number conservation in static-path approximation for thermal superfluid systems", Physical Review C—Nuclear Physics, vol. 76, no. 6, pp. 064306, 2007.

[10] Y. Nogami, "Improved superconductivity approximation for the pairing interaction in nuclei", Physical Review, vol. 134, no. 2B, pp. B313, 1964.

[11] H, C. Pradhan, Y. Nogami and J. Law, "Study of approximations in the nuclear pairing-force problem", Nuclear Physics A, vol. 201, no. 2, pp. 357-368, 1973.

[12] N. Dang, N. Dinh, P. Ring and R. Rossignoli, "Lipkin-Nogami method at finite temperature in the static-path approximation", Physical Review C, vol. 47, no. 2, pp. 606, 1993.

[13] J. Bardeen, L. N. Cooper and J. R. Schrieffer, "Theory of superconductivity", Physical review, vol. 108, no. 5, pp. 1175, 1957.

[14] L. G. Moretto, "Statistical description of a paired nucleus with the inclusion of angular momentum", Nuclear Physics A, vol. 185, no. 1, pp. 145-165, 1972.

[15] L. N. Cooper, "Bound electron pairs in a degenerate Fermi gas", Physical Review, vol. 104, no. 4, pp. 1189-1190, 1956.

[16] D. G. Madland and J. R. Nix, "New model of the average neutron and proton pairing gaps", Nuclear Physics A, vol. 476, no. 1, pp. 1-38, 1988.

[17] W. Chongshi and Z. Jinyan, "Nuclear Pairing Phase Transition", Chinese Physics C, vol. 12, no. 1, pp. 95-101, 1988.

[18] P. Cejnar, J. Jolie and R. F. Casten, "Quantum phase transitions in the shapes of atomic nuclei", Reviews of Modern Physics, vol. 82, no. 3, pp. 2155-2212, 2010.

[19] E. Yüksel, F. Mercier, J. P. Ebran and E. Khan, "Clustering in nuclei at finite temperature", Physical Review C, vol. 106, no. 5, pp. 054309, 2022.

[20] P. S. Deo, J. P. Pekola and M. Manninen, "Heat capacity of mesoscopic superconducting disks", EPL (Europhysics Letters), vol. 50, no. 1, pp. 649-655, 2000.

[21] H. S. Røising, G. Wagner, M. Roig, A. T. Rømer and B. M. Andersen, "Heat capacity double transitions in time-reversal symmetry broken superconductors", Physical Review B, vol. 106, no. 17, pp. 174518, 2022.

[22] N. Q. Hung and N. D. Dang, "Pairing reentrance in hot rotating nuclei", Physical Review C—Nuclear Physics, vol. 84, no. 5, pp. 054324, 2011

[23] L. Liu, Z. H. Zhang and P. W. Zhao, "Thermodynamics of pairing transition in hot nuclei", Physical Review C, vol. 92, no. 4, pp. 044304, 2015.

[24] H. Le, D. X. Tran, N. A. Nguyen, M. H. Nguyen, C. D. Tran and H. Nguyen, "Updated heat capacities of 161-164Dy nuclei", Communications in Physics, vol. 33, no. 2, pp. 133-142, 2023.

[25] M. Guttormsen, A. Yoram, W. Ryssens, K. O. Ay, M. Ozgur, E. M. Algin, et al., "Strong enhancement of level densities in the crossover from spherical to deformed neodymium isotopes", Physics Letters B, vol. 816, pp. 136206, 2021.

[26] L. G. Moretto, "Statistical description of a paired nucleus with the inclusion of angular momentum", Nuclear Physics A, vol. 185, no. 1, pp.145-165, 1972.

[27] Z. Kargar and R. N. Gashtaseb, "Nuclear pairing fluctuations and angular momentum dependence of superconductivity in 94Mo nucleus", International Journal of Modern Physics E, vol. 27, no. 11, pp. 1850096, 2018.

[28] M. Sano and S. Yamasaki, "Phase transition and level density of atomic nuclei", Progress of Theoretical Physics, vol. 29, no. 3, pp. 397-414, 1963.

[29] Z. Kargar and S. Afrookhteh, "Deformation dependence of superconductivity in neodymium isotopes", The European Physical Journal Plus, vol. 139, no. 9, pp. 862-869, 2024.

[30] O. Civitarese, M. Reboiro and P. Vogel, "Neutron-proton pairing in the BCS approach", Physical Review C, vol. 56, pp. 1840-1843, 1997.

[31] S. G. Nilsson, C. F. Tsang, A. Sobiczewski, Z. Szymański, S. Wycech, C. Gustafson, et al., (1969), "On the nuclear structure and stability of heavy and superheavy elements", Nuclear Physics A, vol. 131, no. 1, pp. 1-66, 1969.

JMRPh. (11)(1): 42-58, Spring & Summer, 2026

The effect of angular momentum on the thermodynamic properties of $^{146\text{-}147}$Nd isotopes

Shahab Afrookhteh

Department of Physics, Education Department of Kangan, Kangan, Bushehr, Iran

Article details

Received: 2026-09-07
Accepted: 2026-10-11
Published: 2026-10-12

ISSN: 2588-493x
eSSN: 2588-4821

Correspondence email:

a.shahab1370@gmail.com

Doi:
10.22034/jmrph.2026.137958.1004

Abstract

In this paper, the effect of angular momentum on the thermodynamic properties of $^{146\text{-}147}$Nd isotopes is investigated. To this end, the Mean-gap BCS (MEGBCS) model has been employed to consider thermal fluctuations. In this model, the thermodynamic quantities of the nucleus are calculated using the average pairing gap parameter at various angular momenta. Results from the standard BCS model are also presented for comparison. The obtained results show that, in contrast to the standard BCS model where pairing correlations vanish at the critical temperature, in MEGBCS model, with increasing temperature, pairing does not vanish at the critical temperature but instead tends toward a constant value. Also, the pairing gap increases with increasing temperature at high angular momentum, which is referred to as thermally assisted pairing correlation. Moreover, the inclusion of thermal fluctuations leads to an S-shaped behavior in the heat capacity versus temperature, which can be interpreted as the pairing phase transition. Furthermore, it is observed that as angular momentum increases, the S-shaped structure in the heat capacity disappears, and the nuclear phase transition occurs at lower temperatures. The nuclear level density was calculated as a function of excitation energy for various angular momenta $J = 0 - 20\ \hbar$ and compared with the experimental data and results obtained from the Shell Model Monte Carlo (SMMC) approach. It is observed that the nuclear level density increases with excitation energy, whereas it decreases as the angular momentum increases. The calculations performed using the MEGBCS approach for $^{146\text{-}147}$Nd isotopes show excellent agreement with both experimental data and SMMC model results.

Keywords: Angular momentum, Thermal fluctuations, Heat capacity, Nuclear level density