

اندازه‌گیری ضریب بازگشت و انرژی تلف‌شده در برخورد اجسام کروی با سطح ثابت

محمد عباسیان مطلق^{*}، حسن تشکری^{*}

گروه فیزیک، واحد قم، دانشگاه آزاد اسلامی، قم، ایران

اطلاعات مقاله

چکیده

ضریب بازگشت یکی از مهم‌ترین پارامترهای مکانیک برخورد است که نقش تعیین‌کننده‌ای در تحلیل برخوردهای الاستیک و غیرالاستیک، مدل‌سازی سامانه‌های دینامیکی و طراحی تجهیزات صنعتی دارد. در این پژوهش، روشی برای اندازه‌گیری ضریب بازگشت و میزان انرژی تلف‌شده ناشی از برخورد اجسام کروی با سطح ثابت و ارتباط آن با زاویه برخورد به‌صورت تجربی مورد بررسی قرار گرفته است. ابتدا روابط میان این کمیت‌ها و کمیت‌های قابل اندازه‌گیری بر اساس قوانین پایستگی، معادلات مکانیک حرکت و برخورد را به‌دست آورده و سپس با طراحی آزمایش، یک گوی کروی فولادی (بلبرینگ کرم-استیل به شعاع ۱ سانتی‌متر و جرم ۷/۸ گرم) از ارتفاع مشخص رها و با دو سطح فولادی با ترکیب آلیاژی متفاوت، تحت زاویه‌های برخورد گوناگون (۱۰ تا ۶۵ درجه)، برخورد داده شد و ضریب بازگشت و درصد انرژی تلف‌شده برای هر دو سطح محاسبه گردید. نتایج نشان داد که ضریب بازگشت علاوه بر ویژگی‌های مکانیکی مواد، به شرایط تماس و زاویه برخورد وابسته است و با کاهش ضریب بازگشت، سهم انرژی اتلافی افزایش می‌یابد. نتایج تجربی روند تغییرات ضریب بازگشت و انرژی تلف‌شده بر حسب زاویه برخورد را همراه با عدم قطعیت اندازه‌گیری نشان می‌دهند. یافته‌های این پژوهش می‌تواند در تحلیل برخورد اجسام، طراحی سامانه‌های جذب ضربه، مدل‌سازی دینامیک اجسام صلب و آموزش آزمایشگاه‌های فیزیک کاربرد داشته باشد.

واژگان کلیدی: ضریب بازگشت، برخورد اجسام کروی، انرژی تلف‌شده، برخورد الاستیک، آزمایشگاه فیزیک.

تاریخ دریافت: ۱۴۰۵/۰۵/۰۸

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۵/۰۷/۱۹

تاریخ چاپ: ۱۴۰۵/۰۷/۲۰

شاپای چاپی: ۴۹۲۱-۲۵۸۸

شاپای الکترونیکی: ۴۹۳x-۲۵۸۸

* نویسنده مسئول:

abbasian@iau.ic.ir

hasan.tashakori@iau.ic.ir

Doi:

۱۰,۲۲۰۳۴/jmrph.۲۰۲۶,۱۳

۷۶۳۱,۱۰۰۱

۱- مقدمه

برخورد اجسام، چه در مقیاس های زیراتمی و چه در مقیاس ماکروسکوپی، از پدیده های بنیادی در فیزیک محسوب می شود. در حوزه مکانیک کلاسیک، بررسی برخوردهای اجسام جامد، از جمله توپ های کروی مانند توپ تنیس، از اهمیت ویژه ای برخوردار است و در پژوهش های متعددی بررسی شده اند [۱-۱۶]. یکی از جنبه های این موضوع، تحلیل برخورد یک جسم کروی با سطحی ثابت است. گاروین^۱ و برودی^۲ از جمله محققانی بوده اند که به صورت نظری به این موضوع پرداخته اند [۱، ۵]. در برخوردهای ناکشسان، پارامترهایی همچون سرعت خطی و زاویه ای، انرژی جنبشی، زاویه برخورد و تغییر شکل اجسام نقش دارند و نیازمند اندازه گیری های دقیق آزمایشگاهی اند [۷-۸]. ضریب بازگشت^۳ به عنوان یکی از کمیت های کلیدی در این زمینه، وابستگی شناخته شده ای به ویژگی های فیزیکی اجسام مانند جنس، جرم، شکل، سرعت و شرایط محیط برخورد دارد [۷-۱۶]. در این تحقیق، با ارائه یک روش تجربی، به بررسی تابعیت ضریب بازگشت و انرژی تلف شده به زاویه برخورد میان یک گوی کروی و سطح ثابت پرداخته ایم و روابط تحلیلی لازم برای استخراج این وابستگی ها از داده های تجربی را ارائه می کنیم. مطالعات پیشین [۱-۱۶] نشان داده اند که ضریب بازگشت به ویژگی های فیزیکی اجسام مانند جنس، جرم، شکل و سرعت برخورد وابسته است، اما این مطالعات عمدتاً بر برخورد قائم یک جسم با سطح یا برخورد مایل میان دو جسم کروی متمرکز بوده اند [۵، ۶، ۱۰، ۱۵]. شکاف باقی مانده در این مطالعات، فقدان یک روش تجربی ساده و در دسترس برای اندازه گیری هم زمان و کمی وابستگی ضریب بازگشت و انرژی تلف شده به زاویه برخورد، به طور خاص برای هندسه برخورد یک گوی با سطح ثابت، همراه با یک رابطه تحلیلی صریح و تحلیل عدم قطعیت اندازه گیری هاست. پژوهش حاضر با ارائه یک

آرایش آزمایشگاهی مبتنی بر اندازه گیری فاصله افقی برخورد، رابطه های تحلیلی صریح (روابط ۸ و ۹) برای استخراج هم زمان e و Q از این اندازه گیری، و تحلیل کمی عدم قطعیت (بخش ۴-۱)، این شکاف را پوشش می دهد و امکان تعمیم روش به گوی ها و سطوح دیگر را نیز فراهم می آورد.

۲- مبانی نظری

لازم به ذکر است که در استخراج روابط این بخش، فرض های زیر به کار رفته اند: صرف نظر از اثرات مقاومت هوا و چرخش زمین به دلیل ناچیز بودن آن ها [۹]؛ پس از به دست آوردن روابط کلی تر در حالت ساده شده برای اندازه گیری یک نمونه خاص، تقریب شعاع میانگین گوی در لحظه برخورد با شعاع اسمی آن ($r \approx r_1$) و فرض رهاسازی گوی از حال سکون بدون چرخش اولیه ($\omega_1 = 0$)؛ و عدم لحاظ مستقل ضریب اصطکاک بین گوی و سطح در مدل، به طوری که نقش آن صرفاً به صورت کیفی در تفسیر نتایج در نظر گرفته شده است.

گوی کروی به جرم m و شعاع r با سرعت اولیه v_1 و سرعت زاویه ای ω_1 تحت زاویه θ با سطحی ثابت برخورد می کند. پس از برخورد، گوی با سرعت v_2 و سرعت زاویه ای ω_2 تحت زاویه α از سطح جدا می شود (شکل ۱). در این برخورد ناکشسان، مقداری انرژی تلف شده و ممکن است شعاع گوی در لحظه برخورد نیز تغییر کند. مطالعه دینامیک حاکم بر این برخورد نشان می دهد در حالتی که گوی در انتهای بازه زمانی برخوردش با سطح شروع به چرخش کند، بعد از برخورد مؤلفه سرعت گوی موازی با سطح با رابطه زیر به دست می آید [۸].

^۳ Coefficient of restitution

^۱ Garwin

^۲ Brody

$$Q = \frac{1}{\gamma} m [v_1^2 + \beta m r^2 \omega_1^2 - (1 + \beta + \cot^2 \alpha) u^2] \quad (5)$$

فرض کنیم در برخورد یک کره سخت با سطح بتوانیم $r \approx r_1$ در نظر بگیریم، از معادله (۴) خواهیم داشت:

$$e = \cot \alpha \left[\frac{\beta r \omega_1 + v_1 \sin \theta}{v_1 \cos \theta (\beta + 1)} \right] \quad (6)$$

در این حالت، Q انرژی تلف شده را می توان بر حسب e ، ضریب بازگشت به صورت زیر به دست آورد:

$$Q = \frac{1}{\gamma} m v_1^2 \left[1 - e^2 \cos^2 \theta - \frac{(\sin \theta + \frac{\beta r \omega_1}{v_1})^2}{\beta + 1} \right] + \frac{1}{\gamma} \beta m r^2 \omega_1^2 \quad (7)$$

باشد معادلات (۶) و (۷) به $\omega_1 = 0$ در حالت خاص اگر صورت زیر خواهند شد:

$$e = \frac{1}{1 + \beta} \cot \alpha \tan \theta \quad (8)$$

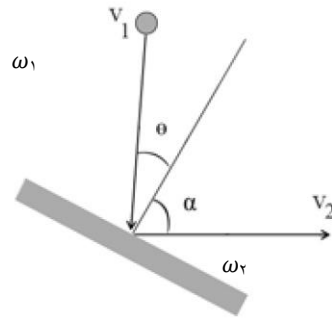
$$Q = \frac{1}{\gamma} m v_1^2 \left[1 - e^2 \cos^2 \theta - \frac{\sin^2 \theta}{1 + \beta} \right] \quad (9)$$

در برخورد یک ذره که برای آن $\beta = 0$ است:

$$e = \cot \alpha \tan \theta \quad (10)$$

$$Q = \frac{1}{\gamma} m v_1^2 [1 - e^2] \cos^2 \theta \quad (11)$$

در حالت کشسان کامل، که $(Q = 0)$ است، روابط به صورت نتایج قابل انتظار $e = 1$ و $\alpha = \theta$ در می آیند. به جز چند حالت خاص، برای اندازه گیری e و Q اندازه گیری $\cot \alpha$ الزامی است. در بخش بعد روشی را برای اندازه گیری $\cot \alpha$ مورد بررسی قرار می دهیم.



شکل (۱): تصویر شماتیک برخورد گوی کروی با سطح مسطح.

$$v_2 \sin \alpha = \frac{\beta r_1^2 r \omega_1 + r^2 v_1 \sin \theta}{\beta r_1^2 + r^2} \quad (1)$$

$$v_2 \sin \alpha = r \omega_2 \quad (2)$$

در این روابط r_1 شعاع میانگین گوی در زمان برخورد است و β به ترتیب مقادیر $\frac{1}{\gamma}$ و $\frac{1}{\gamma^2}$ را برای گوی توپر و توخالی خواهد داشت. ضریب بازگشت معیاری از میزان کشسانی برخورد است و مقدار آن از صفر (برخورد کاملاً ناکشسان) تا یک (برخورد کاملاً کشسان) متغیر است. در اینجا θ و α زاویه های بردار سرعت پیش و پس از برخورد با نرمال سطح هستند (شکل ۱) و ضریب بازگشت بر حسب بزرگی مؤلفه های نرمال سرعت تعریف می شود؛ بنابراین مقداری نامنفی دارد. با توجه به تعریف ضریب بازگشت:

$$e = \frac{v_2 \cos \alpha}{v_1 \cos \theta} \quad (3)$$

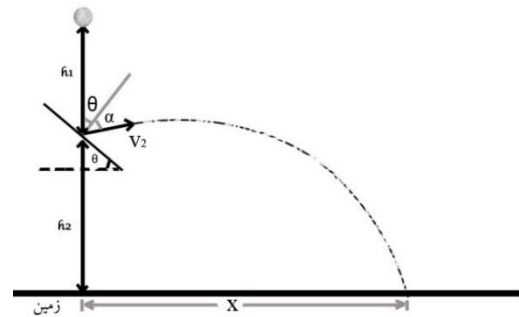
و با استفاده از رابطه (۱) خواهیم داشت:

$$e = \cot \alpha \left[\frac{\beta r_1^2 r \omega_1 + r^2 v_1 \sin \theta}{v_1 \cos \theta (\beta r_1^2 + r^2)} \right] \quad (4)$$

با استفاده از پایداری انرژی [۱۷] (یعنی برابری انرژی جنبشی گوی پیش از برخورد با مجموع انرژی جنبشی آن پس از برخورد و انرژی تلف شده Q) و روابط (۱) و (۲)، با تعریف $u = v_2 \sin \alpha$ (سمت راست رابطه (۱))، انرژی تلف شده (Q) از رابطه زیر محاسبه می شود:

۳- محاسبات تجربی

در این بخش، از یک آرایش آزمایشگاهی مبتنی بر پرتاب آزاد گوی کروی از ارتفاع مشخص بر سطحی با زاویه دلخواه استفاده شده است (شکل ۲). دستگاه مختصات را به گونه ای انتخاب می کنیم که محور y در امتداد اولیه حرکت، و مبدأ روی زمین باشد. با اندازه گیری فاصله افقی x ، بین محل برخورد گوی با سطح و نقطه بازتاب آن، و با استفاده از روابط (۸)، (۹) و (۱۲)، e و Q محاسبه شده اند.



شکل (۲): تصویر شماتیک مدل آزمایشگاهی طراحی شده.

با توجه به رابطه (۱) و با اندکی محاسبه برای حالت خاص $r \approx r_1$ و $\omega_1 = 0$ می توان نشان داد:

$$\cot \alpha = \frac{-Z_1 + (Z_1^2 - Z_2 Z_3)^{1/2}}{Z_2} \quad (12)$$

که در آن:

$$Z_1 = x \cos \theta + h_1 \sin^2 \theta$$

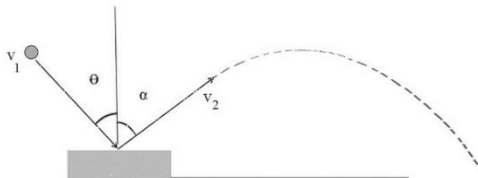
$$Z_2 = x \cos^2 \theta + h_1 \sin^2 \theta$$

$$Z_3 = x \sin^2 \theta + 2 h_1 \sin^2 \theta$$

$$Z_4 = \frac{-x^2 g (\beta + 1)^2}{(v_1 \sin \theta)^2} - x \sin^2 \theta + 2 h_1 \cos^2 \theta$$

با اندازه گیری x ، می توان مقدار $\cot \alpha$ را تعیین کرد و با استفاده از روابط (۸) و (۹)، مقادیر ضریب بازگشت e و انرژی تلف شده Q را به دست آورد. در صورتی که گوی از ارتفاع اولیه h_1 بالای سطح و از حال سکون رها شود، سرعت اولیه آن برابر با $v_1 = (2gh_1)^{1/2}$

خواهد بود. در این شرایط، با ثابت نگه داشتن ارتفاع های h_1 و h_2 ، و اندازه گیری x ، امکان بررسی تجربی تغییرات e و Q بر حسب زاویه برخورد θ فراهم می شود.



شکل (۳): تصویر شماتیک برخورد گوی با سطح مسطح افقی.

در حالت دیگر، اگر سطح روی زمین قرار داشته باشد و گوی با زاویه θ نسبت به خط قائم به سطح برخورد کند (شکل ۳)، با استفاده از رابطه (۱) به دست می آید:

$$\cot \alpha = \frac{xg(\beta r_1^2 + r^2)^{1/2}}{(2\beta r_1^2 r \omega_1 + r^2 v_1 \sin \theta)^{1/2}} \quad (13)$$

که در این رابطه، x فاصله ی بین محل برخورد مجدد گوی با زمین و محل برخورد اولیه گوی است. با استفاده از روابط (۴) و (۱۳)، ضریب بازگشت e به صورت زیر خواهد بود:

$$e = \frac{1}{2} \frac{xg(\beta r_1^2 + r^2)^{1/2}}{(\beta r_1^2 r \omega_1 + r^2 v_1 \sin \theta) v_1 \cos \theta} \quad (14)$$

در حالت خاصی که $r \approx r_1$ باشد، رابطه (۱۴) به صورت ساده تر درمی آید:

$$e = \frac{1}{2} \frac{xg(\beta + 1)}{(\beta r \omega_1 + v_1 \sin \theta) v_1 \cos \theta} \quad (15)$$

در برخورد کاملاً کشسان یک ذره با این سطح، $e = 1$ و $\beta = 0$ خواهد بود. با توجه به رابطه (۱۵)، نتیجه ی زیر قابل انتظار است:

$$x = \frac{v_1^2 \sin^2 \theta}{g} \quad (16)$$

که رابطه برد برای ذره است. همچنین برای یک گوی با $\omega_1 = 0$ ، ضریب بازگشت به صورت زیر خواهد شد:

$$e = (\beta + 1) \frac{x}{d} \quad (17)$$

که در این رابطه d برد ذره در رابطه (۱۶) است. همانطور که انتظار می‌رفت روابط بالا تابعیت ضریب بازگشت و انرژی تلف‌شده را به کمیت‌های اولیه نشان می‌دهد که البته برای اندازه‌گیری هر کدام از این تابعیت‌ها نیاز به ارائه روشی آزمایشگاهی می‌باشد. در ادامه ما به بررسی تابعیت ضریب بازگشت و انرژی تلف‌شده در برخورد یک گوی با یک سطح ثابت، به زاویه برخورد می‌پردازیم.

۴- اندازه‌گیری و نتایج تجربی

آرایش وسایل مورد استفاده در این اندازه‌گیری در شکل (۲) نشان داده شده است. در این بخش، از یک آرایش آزمایشگاهی مبتنی بر پرتاب آزاد گوی کروی از ارتفاع مشخص h_1 ، بر سطحی با زاویه دلخواه واقع در ارتفاع مشخص h_2 استفاده شده است. با اندازه‌گیری فاصله افقی x ، بین محل برخورد گوی با سطح و نقطه بازتاب آن، و با استفاده از روابط (۸)، (۹) و (۱۲)، مقادیر e و Q محاسبه شده‌اند.

در این آزمایش، گوی مورد استفاده یک بلبینگ از جنس کرم-استیل با شعاع ۱ سانتی‌متر و جرم $7/8$ گرم است. این گوی به وسیله‌ای یک آهن‌ربای الکتریکی در ارتفاع $h_1 = 130$ سانتی‌متر بالاتر از سطح برخورد، از حالت سکون رها می‌شود. سطح برخورد در ارتفاع $h_2 = 197$ سانتی‌متر از سطح زمین قرار دارد. در ابتدا، سطح مورد نظر در زاویه‌ی معین θ نسبت به افق تثبیت می‌شود. پس از رهاسازی، گوی با سرعت $v_1 = \sqrt{2gh_1}$ به سطح برخورد کرده و سپس با سرعت v_2 و سرعت زاویه‌ای ω_2 از آن جدا می‌شود (شکل

۲). در این آزمایش زاویه θ از 10° درجه تا 65° درجه با گام‌های 5° درجه‌ای تغییر داده شد. برای هر زاویه، آزمایش پنج مرتبه تکرار گردید و میانگین مقدار جابه‌جایی افقی x محاسبه شد. با استفاده از روابط (۸)، (۹) و (۱۲) و با در نظر گرفتن اینکه برای کره‌ی توپر

$\beta = \frac{2}{5}$ است، مقادیر ضریب بازگشت e و پارامتر Q ، برای دو سطح

فولادی اندازه‌گیری شدند. برای اختصار، نسبت انرژی

تلف‌شده به انرژی جنبشی اولیه با نماد $q \equiv \frac{Q}{mv_1^2}$ نشان

داده می‌شود. لازم به ذکر است که در این پژوهش، اثرات

مقاومت هوا و چرخش زمین به دلیل ناچیز بودن، در

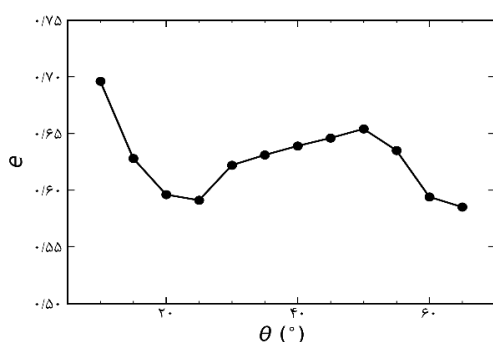
محاسبات لحاظ نشده‌اند [۹]. برای سطح نخست با جرم

$1/904$ کیلوگرم، مقادیر به‌دست آمده برای e و q در جدول

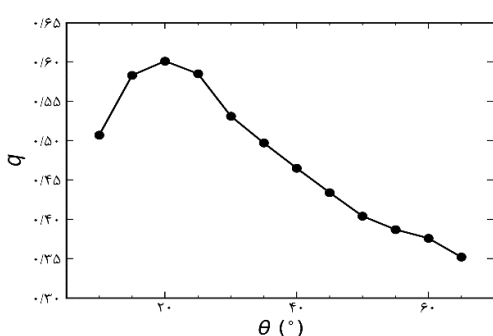
۱ ارائه شده است.

نمودار خطی مقادیر به‌دست آمده برای سطح نخست در

شکل‌های ۴ و ۵ رسم شده است.



شکل (۴): نمودار تغییرات ضریب بازگشت e بر حسب زاویه‌ی برخورد θ برای سطح نخست.



شکل (۵): نمودار تغییرات q بر حسب زاویه‌ی برخورد θ برای سطح نخست.

برای سطح فولادی دوم به جرم $1/482$ کیلوگرم و ساختار

آلیاژی کمی متفاوت‌تر، مقادیر به‌دست آمده برای e و q در

جدول ۲ ارائه شده است.

۴-۱- تحلیل عدم قطعیت و مقایسه کمی نتایج

عدم قطعیت گزارش شده برای e و q در جدول های ۱ و ۲، از محاسبه عدم قطعیت $\bar{x}$ در پنج تکرار [۱۸] با استفاده از روابط:

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (18)$$

$$\sigma_x = \frac{S}{\sqrt{n}} \quad (19)$$

و عدم قطعیت $\sigma_{h_1} = \sigma_{h_2} = 0.5 \text{ cm}$ و $\sigma_\theta = \frac{1}{6}$ بر حسب درجه به کمک رابطه های

$$\sigma_e^2 \approx \left(\frac{\partial e}{\partial x}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial e}{\partial \theta}\right)^2 \sigma_\theta^2 + \left(\frac{\partial e}{\partial h_1}\right)^2 \sigma_{h_1}^2 + \left(\frac{\partial e}{\partial h_2}\right)^2 \sigma_{h_2}^2 \quad (20)$$

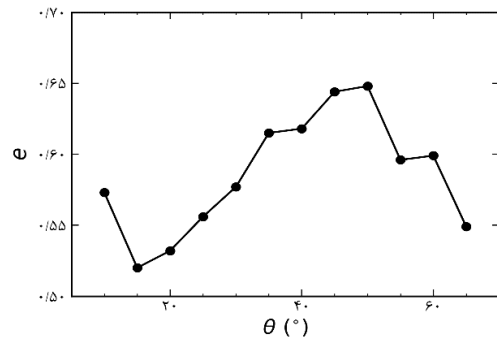
و

$$\sigma_q^2 = \left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial \theta}\right)^2 \sigma_\theta^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial h_1}\right)^2 \sigma_{h_1}^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial h_2}\right)^2 \sigma_{h_2}^2 \quad (21)$$

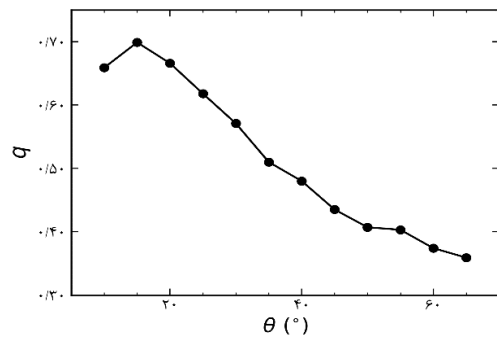
به دست آمده است. لازم به ذکر است که مقدار عدم قطعیت های h_1, h_2 و θ مربوط به دقت وسایل اندازه گیری به کار رفته است. همچنین با توجه به ثابت بودن h_1 و h_2 در آزمایش هر سطح، عدم قطعیت به دست آمده برای e و q بیشتر ناشی از عدم قطعیت θ و $\bar{x}$ بوده است.

با استفاده از داده های جدول های ۱ و ۲ مشاهده می شود که بیشینه ی q برای سطح نخست در زاویه $\theta \approx 20^\circ$ درجه (برابر با 0.601 ± 0.003) و برای سطح دوم در زاویه $\theta \approx 15^\circ$ درجه (برابر با 0.699 ± 0.011) رخ می دهد. ضریب بازگشت e برای هر دو سطح کمینه ای در بازه $15-25^\circ$ درجه دارد و در زوایای کوچک تر و بزرگ تر از این بازه افزایش می یابد. این هم زمانی کمینه e و بیشینه q با رابطه (۹) سازگار است، زیرا با افزایش e ، جمله $e^2 \cos^2 \theta$ در آن رابطه بزرگ تر شده و

نمودار مقادیر به دست آمده برای سطح دوم در شکل های ۶ و ۷ رسم شده است.

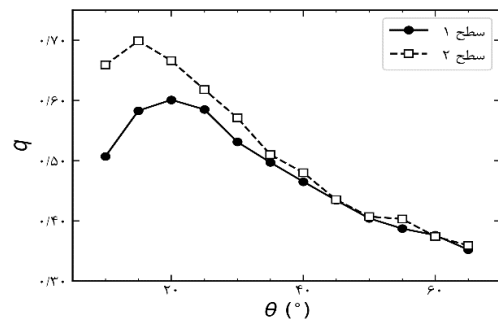


شکل (۶): نمودار تغییرات ضریب بازگشت e بر حسب زاویه ی برخورد θ برای سطح دوم.



شکل (۷): نمودار تغییرات q بر حسب زاویه ی برخورد θ برای سطح دوم.

برای مقایسه، شکل ۸ نمودار انرژی تلف شده در دو سطح را نشان می دهد.



شکل

(۸): نمودار تغییرات q بر حسب زاویه θ برای دو سطح.

لازم به تأکید است که ضریب اصطکاک بین گوی و دو سطح در این پژوهش به طور مستقل اندازه گیری یا در مدل به کار گرفته نشده است؛ پارامتر β در روابط (۸) و (۹) تنها توزیع جرم گوی را لحاظ می کند و نقش اصطکاک سطحی صرفاً به صورت کیفی در نظر گرفته شده است [۸]. اندازه گیری مستقل ضریب اصطکاک موضوع مطالعه تحقیقی بعدی به همراه سایر کمیت های فیزیکی دیگر مثل سرعت زاویه ای پس از برخورد ω_2 می تواند باشد.

در نتیجه، به ازای زاویه برخورد یکسان، کسر انرژی جنبشی باقی مانده افزایش و مقدار q کاهش می یابد. اختلاف e دو سطح در هر زاویه از حدود 0.002 (در $\theta = 45^\circ$ درجه) تا حدود 0.12 (در $\theta = 10^\circ$ درجه) متغیر است و میانگین این اختلاف در کل بازه ای زاویه ای تقریباً 0.05 است. همچنین با توجه به نمودار شکل (۸)، مشاهده می شود دو سطح رفتاری شبیه به هم دارند که با توجه به این که دو سطح فولادی ترکیب شیمیایی نزدیک به هم دارند دور از انتظار نیست.

جدول (۱): مقادیر X (بر حسب سانتی متر)، e و q برای سطح نخست.

θ	۱۰	۱۵	۲۰	۲۵	۳۰	۳۵	۴۰	۴۵	۵۰	۵۵	۶۰	۶۵
$\bar{X}$	۱۲۸/۵۳ ±۱/۳۷	۱۶۴/۳۵ ±۱/۴۳	۱۹۱/۹۶ ±۱/۱۸	۲۱۳/۱۶ ±۱/۶۲	۲۳۳/۰۶ ±۱/۸۲	۲۳۵/۷۴ ±۱/۰۴	۲۳۷/۶۱ ±۱/۲۶	۲۱۱/۷۵ ±۱/۵۳	۱۹۱/۱۳ ±۱/۳۹	۱۶۳/۲۹ ±۱/۸۲	۱۳۳/۰۶ ±۱/۳۳	۱۰۸/۷۳ ±۱/۵۸
q	-۰/۵۰۷ ±۱/۰۱۸	-۰/۵۸۳ ±۱/۰۱	-۰/۶۰۱ ±۱/۰۰۳	-۰/۵۸۵ ±۱/۰۰۲	-۰/۵۳۱ ±۱/۰۰۲	-۰/۴۹۷ ±۱/۰۰۳	-۰/۴۶۵ ±۱/۰۰۲	-۰/۴۳۴ ±۱/۰۰۵	-۰/۴۰۴ ±۱/۰۰۳	-۰/۳۸۷ ±۱/۰۰۴	-۰/۳۷۶ ±۱/۰۰۳	-۰/۳۵۲ ±۱/۰۰۳
e	-۰/۶۹۶ ±۱/۰۰۷	-۰/۶۲۸ ±۱/۰۰۶	-۰/۵۹۶ ±۱/۰۰۲	-۰/۵۹۱ ±۱/۰۰۲	-۰/۶۲۳ ±۱/۰۰۲	-۰/۶۳۱ ±۱/۰۰۳	-۰/۶۳۹ ±۱/۰۰۱	-۰/۶۴۶ ±۱/۰۰۶	-۰/۶۵۴ ±۱/۰۰۱	-۰/۶۳۵ ±۱/۰۰۵	-۰/۵۹۴ ±۱/۰۰۲	-۰/۵۸۵ ±۱/۰۰۵

جدول (۲): مقادیر X (بر حسب سانتی متر)، e و q برای سطح دوم.

θ	۱۰	۱۵	۲۰	۲۵	۳۰	۳۵	۴۰	۴۵	۵۰	۵۵	۶۰	۶۵
$\bar{X}$	۱۰۷/۴۲ ±۱/۶۹	۱۴۰/۰۱ ±۱/۰۹	۱۷۴/۶۴ ±۱/۰۲	۲۰۲/۹۶ ±۱/۷۷	۲۱۹/۸۴ ±۱/۴۵	۲۳۰/۹۸ ±۲/۹۴	۲۳۱/۹۱ ±۱/۵۹	۲۱۱/۳۸ ±۱/۵۴	۱۹۰ ±۱/۶۶	۱۵۶/۸۸ ±۱/۲۲	۱۳۳/۷۳ ±۱/۴۸	۱۰۵/۳۱ ±۱/۲۶
q	-۰/۶۵۹ ±۱/۰۱۷	-۰/۶۹۹ ±۱/۰۱۱	-۰/۶۶۶ ±۱/۰۰۴	-۰/۶۱۸ ±۱/۰۰۲	-۰/۵۷۱ ±۱/۰۰۱	-۰/۵۱۰ ±۱/۰۱۱	-۰/۴۸۰ ±۱/۰۰۳	-۰/۴۳۵ ±۱/۰۰۳	-۰/۴۰۷ ±۱/۰۰۵	-۰/۴۰۳ ±۱/۰۰۳	-۰/۳۷۴ ±۱/۰۰۳	-۰/۳۵۹ ±۱/۰۰۲
e	-۰/۵۷۳ ±۱/۰۱	-۰/۵۲۰ ±۱/۰۰۹	-۰/۵۳۲ ±۱/۰۰۳	-۰/۵۵۶ ±۱/۰۰۲	-۰/۵۷۷ ±۱/۰۰۱	-۰/۶۱۵ ±۱/۰۱۳	-۰/۶۱۸ ±۱/۰۰۲	-۰/۶۴۴ ±۱/۰۰۲	-۰/۶۴۸ ±۱/۰۰۸	-۰/۵۹۶ ±۱/۰۰۱	-۰/۵۹۹ ±۱/۰۰۳	-۰/۵۴۹ ±۱/۰۰۲

۵- نتیجه گیری

به تدریج کاهش می یابد. از آنجا که ضریب بازگشت شاخصی از میزان کشسانی برخورد است، کاهش انرژی تلف شده با افزایش مقدار ضریب بازگشت همراه است و بالعکس. کاهش مقدار ضریب بازگشت و در نتیجه افزایش انرژی تلف شده در بازه ای زاویه ای تا حدود 20° درجه، می تواند ناشی از افزایش گشتاور نیروی اصطکاک بین گوی و سطح، و نیز افزایش سرعت زاویه ای گوی پس از برخورد باشد. شایان ذکر است که

مطابق نتایج تجربی، ضریب بازگشت و انرژی تلف شده هر دو تابعی از زاویه برخورد و جنس سطوح هستند. برای هر دو سطح مورد بررسی، انرژی تلف شده دارای یک مقدار بیشینه است ($\theta \approx 20^\circ$) درجه برای سطح نخست و $\theta \approx 15^\circ$ درجه برای سطح دوم، مطابق تحلیل کمی بخش ۴-۱ که با افزایش زاویه برخورد از این نقطه،

- Journal of Physics, vol. ۴۶, pp. ۴۱۳-۴۱۵, ۱۹۷۸.
- [۴] R. Cross, "The bounce of a ball," American Journal of Physics, vol. ۶۷, pp. ۲۲۲-۲۲۷, ۱۹۹۹.
- [۵] H. Brody, "That's how the ball bounces," The Physics Teacher, vol. ۲۲, pp. ۴۹۴-۴۹۷, ۱۹۸۴.
- [۶] R. Cross, "The coefficient of restitution for collision of happy balls, unhappy balls, and tennis balls," American Journal of Physics, vol. ۶۸, pp. ۱۰۲۵-۱۰۳۱, ۲۰۰۰.
- [۷] R. Cross, "Measurements of the horizontal coefficient of restitution for a superball and a tennis ball," American Journal of Physics, vol. ۷۰, pp. ۴۸۲-۴۸۹, ۲۰۰۲.
- [۸] G. Barnes, "Study of collision," American Journal of Physics, vol. ۲۶, pp. ۵-۱۲, ۱۹۵۷.
- [۹] M. Hubbard and W. Stronge, "Bounce of hollow balls on a flat surface," Sports Engineering, vol. ۴, pp. ۴۹-۶۱, ۲۰۰۱.
- [۱۰] W. Stronge and A. Ashcroft, "Oblique impact of inflated balls at large deflection," International Journal of Impact Engineering, vol. ۳۴, pp. ۱۰۰۳-۱۰۱۹, ۲۰۰۷.
- [۱۱] S. Knoche and J. Kierfeld, "Buckling of spherical capsules," Physical Review E, vol. ۸۴, ۰۴۶۶۰۸, pp. ۱-۱۳, ۲۰۱۱.
- [۱۲] Adli Haron and K. A. Ismail, "Coefficient of restitution of sports balls: A normal drop test," IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, vol. ۳۶, ۰۱۲۰۳۸, ۲۰۱۲.

ضرب اصطکاک بین گوی و سطوح در این پژوهش به طور مستقل اندازه گیری نشده است؛ این تفسیر جنبه ی کیفی دارد و اندازه گیری مستقل این ضریب برای مطالعات آتی پیشنهاد می شود. این روش تجربی قابلیت اندازه گیری مقادیر مشخصه ی ضریب بازگشت و انرژی تلف شده را برای مواد و سطوح گوناگون داراست. همچنین با ثابت نگه داشتن زاویه ی برخورد و تغییر ارتفاع اولیه گوی، می توان تأثیر سرعت اولیه برخورد بر این دو کمیت را مورد بررسی و تحلیل قرار داد. این روش می تواند به عنوان پایه ای برای مطالعات دقیق تر در بررسی خواص برخورد در مواد گوناگون مورد استفاده قرار گیرد. نتایج این پژوهش می تواند در طراحی سامانه های جذب ضربه، مدل سازی برخورد در شبیه سازی های مهندسی، صنایع ورزشی، رباتیک و آزمایشگاه های آموزشی فیزیک مورد استفاده قرار گیرد.

تشکر و قدردانی (اختیاری)

نویسندگان از حمایت مالی و علمی دانشگاه آزاد اسلامی واحد قم صمیمانه تشکر می کنند. این مقاله بخشی از پروژه ای با عنوان «بررسی تجربی رابطه میان انرژی تلف شده با زاویه برخورد یک جسم با سطح ثابت» است.

منابع

- [۱] R. Garwin, "Kinematics of an ultraelastic rough ball," American Journal of Physics, vol. ۳۷, pp. ۸۸-۹۲, ۱۹۶۹.
- [۲] W. Benson and W. Bauer, "Frame grabbing techniques in undergraduate physics education," American Journal of Physics, vol. ۶۱, pp. ۸۴۸-۸۵۱, ۱۹۹۳.
- [۳] P. A. Maurone and F. J. Wunderlich, "Bouncing ball experiment," American

- [۱۳] R. Cross, "Impact behavior of hollow balls," American Journal of Physics, vol. ۸۲, pp. ۱۸۹-۱۹۵, ۲۰۱۴.
- [۱۴] R. Cross, "Impact behavior of a superball," American Journal of Physics, vol. ۸۳, pp. ۲۳۸-۲۴۸, ۲۰۱۵.
- [۱۵] J. R. Kensrud, A. M. Nathan, and L. V. Smith, "Oblique collision of baseballs and softballs with a bat," American Journal of Physics, vol. ۸۵, pp. ۵۰۳-۵۰۹, ۲۰۱۷.
- [۱۶] R. Cross, "Measuring coefficients of restitution with a piezo disk," Physics Education, vol. ۵۵, ۰۳۵۰۰۸, ۲۰۲۰.
- [۱۷] G. R. Fowles, Analytical Mechanics ۴th ed., CBS International Editions, ۱۹۸۷.
- [۱۸] D. W. Preston and E. R. Dietz, The Art of Experimental Physics, John Wiley & Sons, ۱۹۹۱.

Measurement of the Coefficient of Restitution and Energy Loss in the Collision of Spherical Objects with a Fixed Surface

* Mohammad Abbasian Motlagh, * Hasan Tashakori

Department of Physics, Qo. C., Islamic Azad University, Qom, Iran

Article details

Received: ۲۰۲۶-۰۷-۳۰

Accepted: ۲۰۲۶-۱۰-۱۱

Published: ۲۰۲۶-۱۰-۱۲

ISSN: ۲۵۸۸-۴۸۲۱

eISSN: ۲۵۸۸-۴۹۳۸

Correspondence

email: abbasian@iau.ic.ir
hasan.tashakori@iau.ic.ir

Doi:

۱۰.۲۲۰۳۴/jmrph.۲۰۲۶.
۱۳۷۶۳۱.۱۰۰۱

Abstract

The coefficient of restitution is one of the most important parameters in collision mechanics and plays a significant role in the analysis of elastic and inelastic impacts, dynamic system modeling, and engineering design. In this study, a method for measuring the coefficient of restitution and the energy dissipated from the collision of spherical bodies with a fixed surface, and its relationship with the impact angle, was experimentally investigated. First, the relations among these quantities and the measurable quantities were derived from the conservation laws and the equations of motion and collision; then, by designing an experiment, a single steel spherical ball (a chrome-steel bearing, ۱ cm radius, ۷.۸ g mass) was released from a fixed height and made to collide, at impact angles of $۱۰-۶۵^\circ$, with two steel surfaces of different alloy composition, and the coefficient of restitution and the percentage of dissipated energy were calculated for both surfaces. The results showed that, besides the materials' mechanical properties, the coefficient of restitution depends on the contact conditions and the impact angle, and a lower coefficient of restitution corresponds to greater energy dissipation. The experimental trends of the coefficient of restitution and the dissipated energy with impact angle are reported together with their measurement uncertainties. The proposed approach provides a simple and effective experimental framework for evaluating collision behavior and can be applied in impact mechanics, shock absorption systems, rigid-body dynamics, and undergraduate physics laboratories.

Keywords: Coefficient of Restitution; Collision of Spherical Bodies; Energy Dissipation; Elastic Collision; Physics Laboratory.