

شبیه سازی دینامیک مؤثر دیراک با استفاده از راه پیمایی های کوانتومی بر بستر کامپیوترهای کوانتومی دیجیتال

زینب کیامهر

دانشکده فیزیک، دانشگاه تفرش، تفرش، ایران

چکیده

اطلاعات مقاله

تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۱۱/۲۰

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۵/۰۷/۰۵

تاریخ چاپ: ۱۴۰۵/۰۷/۰۸

شاپای چاپی: ۴۹۲۱-۲۵۸۸

شاپای الکترونیکی: ۴۹۳۴-۲۵۸۸

* نویسنده مسئول

z.kiamehr@tafreshu.ac.ir

DOI:

۱۰.۲۲۰۳۴/jmrph.۲۰۲۶.۱۲
۲۹۱۹.۰

نظریه میدان کوانتومی^۱ چارچوب بنیادی توصیف ذرات و میدان ها در فیزیک مدرن است، اما حل دقیق بسیاری از مدل های آن، به ویژه در رژیم های غیراغتشاشی، با روش های تحلیلی و عددی کلاسیک با دشواری های جدی روبه رو است. یکی از مسیرهای پیشنهادی برای مطالعه چنین سامانه هایی استفاده از شبیه سازی کوانتومی است که در آن دینامیک یک مدل فیزیکی با بهره گیری از سامانه های کوانتومی قابل کنترل بازنمایی می شود. در این کار، امکان مدل سازی یک چارچوب گسسته ای برای توصیف دینامیک نسبیتی با استفاده از راه پیمایی کوانتومی گسسته زمان و پیاده سازی آن بر بستر کامپیوترهای کوانتومی دیجیتال مورد بررسی قرار می گیرد. در این چارچوب، تحول زمانی سامانه با استفاده از عملگرهای یکانی تعریف می شود و نشان داده می شود که در حد پیوسته و با مقیاس بندی مناسب در فضا و زمان، این مدل گسسته می تواند دینامیک مؤثری متناظر با معادله دیراک برای یک ذره آزاد در فضای ۱+۱ بعدی را بازتولید کند. سپس این مدل در قالب مدارهای کوانتومی روی یک سامانه ی پنج کیوبیتی که گراف با ۱۶ گره را نمایش می دهد پیاده سازی می شود تا رفتار دینامیک و الگوی تداخلی توزیع احتمال حاصل از راه پیمایی کوانتومی در شرایط ایده آل و در حضور نویز بررسی شود. برای ارزیابی کمی میزان انحراف نتایج، از وفاداری هلینگر^۲ به عنوان معیار مقایسه میان توزیع های احتمال استفاده می شود که امکان سنجش نظام مند تفاوت میان شبیه سازی ایده آل، مدل های نویزی و نتایج حاصل از اجرا روی سخت افزارهای کوانتومی را فراهم می کند. نتایج نشان می دهد که در معماری های کوانتومی کنونی از نوع NISQ، نویز سخت افزاری می تواند به طور قابل توجهی ساختارهای تداخلی توزیع احتمال را تضعیف کند و وفاداری میان نتایج پیاده سازی و نتایج ایده آل را کاهش دهد. این مطالعه نشان می دهد که ارزیابی کمی اثر نویز برای تفسیر نتایج چنین شبیه سازی هایی ضروری است و راه پیمایی های کوانتومی می توانند به عنوان چارچوبی مناسب برای بررسی های مقدماتی دینامیک های نسبیتی گسسته در سامانه های کوانتومی کوچک مورد استفاده قرار گیرند. از این رو، نتایج این کار را می توان گامی مقدماتی در ارزیابی قابلیت پیاده سازی مدل های ساده شده مرتبط با دینامیک های میدان کوانتومی روی سخت افزارهای کوانتومی نویزی دانست.

واژگان کلیدی: شبیه سازی کوانتومی، نظریه میدان کوانتوم، راه پیمایی کوانتومی، وفاداری هلینگر، نویز سخت افزار کوانتومی.

۱-مقدمه

مفهوم کامپیوتر کوانتومی در فیزیک نسبتاً جدید است و نخستین بار توسط فاینمن در سال ۱۹۸۲ مطرح شد [۱].

^۱ QFT: Quantum field theory

^۲ Hellinger Fidelity

سازگار است و امکان نگاشت درجات آزادی میدان به متغیرهای محاسباتی را فراهم می‌کند. [۲۲]

برای پیاده‌سازی چنین مدل‌هایی روی کامپیوترهای کوانتومی، لازم است دینامیک سامانه‌های میدان به‌صورت الگوریتم‌های کوانتومی گسسته بیان شود. در این زمینه، راه‌پیمایی کوانتومی گسسته‌زمان^۳ به‌عنوان یکی از چارچوب‌های مناسب برای مدل‌سازی دینامیک کوانتومی مطرح شده است. راه‌پیمایی کوانتومی را می‌توان تعمیم کوانتومی راه‌پیمایی تصادفی کلاسیک دانست که در آن اصل برهم‌نهی و تداخل کوانتومی نقش اساسی دارند. در این مدل، درجات آزادی مکانی و داخلی ذره در فضای هیلبرت ترکیبی تعریف می‌شوند و تحول زمانی سامانه از طریق اعمال متوالی عملگرهای یکانی صورت می‌گیرد. مطالعات نظری نشان داده‌اند که در شرایط مناسب، حد پیوسته برخی از این مدل‌های گسسته می‌تواند به معادلات نسبیتی مانند معادله دیراک یا معادلات میدان اسکالر منجر شود [۲۳-۲۶]. به همین دلیل، راه‌پیمایی‌های کوانتومی نه‌تنها به‌عنوان ابزارهای محاسباتی، بلکه به‌عنوان مدل‌های مؤثر برای مطالعه جنبه‌هایی از دینامیک نسبیتی و سامانه‌های کوانتومی گسسته مورد توجه قرار گرفته‌اند.

از دیدگاه محاسباتی، یکی از انگیزه‌های اصلی برای بررسی این چارچوب‌ها محدودیت‌های شبیه‌سازی کلاسیک است. فضای حالت یک سامانه کوانتومی با افزایش تعداد درجات آزادی به‌صورت نمایی رشد می‌کند و حتی برای شبکه‌های نسبتاً کوچک نیز ذخیره و پردازش کامل حالت کوانتومی روی کامپیوترهای کلاسیک بسیار پرهزینه می‌شود [۲۷]. در مقابل، یک کامپیوتر کوانتومی می‌تواند این فضای حالت را به‌طور طبیعی در حالت کوانتومی خود بازنمایی کند و در اصل قادر است برخی از این سامانه‌ها را به‌صورت کارآمدتر شبیه‌سازی نماید [۲۸-۳۰]. با این حال، در عمل پیاده‌سازی چنین شبیه‌سازی‌هایی روی سخت‌افزارهای موجود با چالش‌های جدی همراه است. معماری‌های NISQ به دلیل نویز محیطی، خطاهای دروازه‌ای، زمان هم‌دوسی محدود و تعداد کم کیوبیت‌ها تنها امکان اجرای مدارهای نسبتاً کم‌عمق

پیشنهاد کرد که برای شبیه‌سازی کارآمد سامانه‌های کوانتومی می‌توان از دستگاه‌هایی بهره برد که خود بر اساس قوانین مکانیک کوانتومی عمل می‌کنند. اندکی بعد، دویچ مدل نظری ماشین تورینگ کوانتومی را معرفی کرد [۲] و چارچوب محاسبات کوانتومی را به‌صورت صوری توسعه داد. سپس الگوریتم دویچ-جوزا نخستین نمونه از برتری بالقوه محاسبات کوانتومی نسبت به محاسبات کلاسیک را ارائه کرد [۳-۵]. در ادامه این مسیر، الگوریتم‌های مهمی مانند الگوریتم فاکتورگیری شور [۶] و الگوریتم جستجوی گروور [۷] معرفی شدند که نشان دادند برخی مسائل می‌توانند روی کامپیوترهای کوانتومی با کارایی بسیار بالاتری نسبت به ماشین‌های کلاسیک حل شوند. افزون بر این، شبیه‌سازی سامانه‌های کوانتومی به‌عنوان یکی از کاربردهای بنیادی محاسبات کوانتومی مطرح شده است [۸-۱۱]. با وجود این پیشرفت‌ها، سخت‌افزارهای کوانتومی امروزی هنوز در مرحله‌ای قرار دارند که با عنوان سامانه‌های کوانتومی در مقیاس متوسط نویزی^۱ شناخته می‌شوند؛ این سامانه‌ها با محدودیت‌هایی مانند تعداد نسبتاً کم کیوبیت‌ها، نویز قابل توجه، خطاهای دروازه‌ای و زمان هم‌دوسی محدود مواجه‌اند. [۱۵-۱۲]

در میان کاربردهای بالقوه محاسبات کوانتومی، شبیه‌سازی سامانه‌های میدان کوانتومی از مسائل بنیادی فیزیک نظری به شمار می‌رود. نظریه میدان کوانتومی چارچوبی است که در آن اصول مکانیک کوانتومی و نسبیت خاص برای توصیف میدان‌ها و ذرات بنیادی در فضا-زمان به‌کار گرفته می‌شوند و کاربرد آن از فیزیک ذرات تا ماده چگال گسترش یافته است [۱۶]. با این حال، حل دقیق بسیاری از نظریه‌های میدان کوانتومی، به‌ویژه در رژیم‌های غیراگنتاشی^۲، با روش‌های تحلیلی یا عددی کلاسیک بسیار دشوار است. رشد نمایی فضای حالت، مسئله نشانه در برخی روش‌های عددی و هزینه‌های محاسباتی بسیار بالا از جمله چالش‌های شناخته‌شده در این حوزه هستند [۱۷-۲۰]. یکی از رویکردهای مهم برای مطالعه چنین سامانه‌هایی، فرمول‌بندی شبکه‌ای نظریه میدان کوانتومی است که نخستین بار توسط ویلسون معرفی شد [۲۱]. در این چارچوب، میدان‌ها روی شبکه‌ای گسسته از نقاط فضا-زمان تعریف می‌شوند و با کاهش فاصله‌ی میان نقاط شبکه می‌توان حد پیوسته نظریه را بازیابی کرد. این ساختار گسسته به‌طور طبیعی با معماری کامپیوترهای دیجیتال، از جمله کامپیوترهای کوانتومی،

^۳ DTQW: Discrete-Time Quantum Walk

^۱ Noisy Intermediate-Scale Quantum – NISQ

^۲ Non-perturbative

و سامانه‌های کوچک را فراهم می‌کنند [۳۱-۳۳]. از این رو انتخاب مدل‌هایی که هم از نظر فیزیکی معنادار باشند و هم از نظر منابع محاسباتی قابل پیاده‌سازی باشند اهمیت ویژه‌ای دارد.

راه‌پیمایی کوانتومی از این نظر گزینه‌ای مناسب برای بررسی‌های اولیه محسوب می‌شود، زیرا دینامیک آن را می‌توان با مدارهای کوانتومی نسبتاً ساده و محلی پیاده‌سازی کرد. در سال‌های اخیر، پیاده‌سازی‌های مختلفی از این مدل روی پلتفرم‌های گوناگون از جمله سامانه‌های ابررسانا و یون‌های به‌دام‌افتاده گزارش شده است و این مطالعات نشان داده‌اند که حتی در حضور نویز نیز برخی ویژگی‌های کیفی دینامیک کوانتومی، مانند تداخل و انتشار موجی، قابل مشاهده باقی می‌مانند [۳۴-۳۸]. در عین حال، همین آزمایش‌ها نشان می‌دهند که نویز سخت‌افزاری می‌تواند به‌طور قابل توجهی توزیع احتمال و الگوهای تداخلی حاصل از راه‌پیمایی کوانتومی را تغییر دهد و بنابراین تحلیل کمی اثر نویز برای ارزیابی قابلیت شبیه‌سازی اهمیت دارد.

در این چارچوب، هدف این پژوهش بررسی امکان مدل‌سازی دینامیک نسبیتی گسسته با استفاده از راه‌پیمایی کوانتومی گسسته‌زمان و مطالعه اثر نویز سخت‌افزاری در پیاده‌سازی آن بر بستر کامپیوترهای کوانتومی دیجیتال است. در این کار، چارچوب نظری راه‌پیمایی کوانتومی معرفی می‌شود که در آن تحول زمانی سامانه از طریق عملگر یکانی کلی $\hat{U} = \hat{S}(\hat{C} \otimes I)$ تعریف می‌شود. سپس نشان داده می‌شود که در حد پیوسته و با مقیاس‌بندی مناسب در فضا و زمان، این مدل گسسته می‌تواند دینامیک مؤثری هم‌ارز با معادله دیراک برای یک ذره آزاد در فضای $1+1$ بعدی را بازتولید کند. پس از آن، این مدل در قالب مدارهای کوانتومی روی یک سامانه‌ی پنج‌کیوبیتی که گراف با ۱۶ گره را نمایش می‌دهد پیاده‌سازی می‌شود تا اثر نویز سخت‌افزاری بر توزیع احتمال حاصل از راه‌پیمایی کوانتومی مورد بررسی قرار گیرد. برای مقایسه کمی میان نتایج ایده‌آل و نتایج به‌دست‌آمده در حضور نویز، از معیار وفاداری هلینگر استفاده می‌شود که برای دو توزیع احتمال P و Q به‌صورت $F_H(P, Q) = \sum_x \sqrt{P(x)Q(x)}$ تعریف می‌شود و امکان سنجش میزان انحراف توزیع‌های احتمال را فراهم می‌کند. تمرکز اصلی این مطالعه بر ارزیابی کمی تأثیر نویز بر الگوی تداخل و توزیع احتمال در راه‌پیمایی کوانتومی است.

لازم به تأکید است که مدل مورد استفاده در این پژوهش یک مدل ساده‌شده مبتنی بر راه‌پیمایی کوانتومی است که تنها دینامیک مؤثر

یک ذره آزاد دیراک در فضای $1+1$ بعدی را بازنمایی می‌کند. سامانه‌ی مورد بررسی تعداد محدودی کیوبیت دارد و فاقد برهم‌کنش‌های چندذره‌ای است و بنابراین بسیاری از ویژگی‌های یک نظریه میدان کوانتومی کامل، مانند درجات آزادی نامحدود و میدان‌های برهم‌کنشی، را در بر نمی‌گیرد. از این رو نتایج ارائه‌شده باید به‌عنوان یک مطالعه مقدماتی برای بررسی امکان پیاده‌سازی چنین مدل‌هایی در معماری‌های NISQ و ارزیابی کمی اثر نویز بر دینامیک گسسته تفسیر شوند. وجه متمایز این کار در تمرکز بر سنجش کمی میزان تخریب تداخل کوانتومی در حضور نویز سخت‌افزاری و بررسی قابلیت شبیه‌سازی این دینامیک ساده‌شده در مقیاس سامانه‌های کوانتومی امروزی است.

۲- راه‌پیمایی کوانتومی (Quantum Walks)

حرکت گسسته در یک فضای یک‌بعدی با تعریف حرکت یک ذره روی خط اعداد محدود $[-N, +N]$ مدل‌سازی می‌شود. در ساده‌ترین صورت، حالت سامانه تنها با مکان ذره مشخص می‌شود و تحول زمانی آن با یک فرآیند تصادفی تعریف می‌گردد. توزیع احتمال مکان پس از تعداد زیادی گام زمانی از یک توزیع دوجمله‌ای پیروی می‌کند و میانگین مکان ذره در تمام زمان‌ها در مبدأ باقی می‌ماند. در این چارچوب، واریانس توزیع احتمال مکان با افزایش تعداد گام‌ها افزایش می‌یابد و رفتار انتشار از نوع پخشی است، به‌طوری‌که پهنای توزیع با زمان رشد می‌کند [۳۹-۴۱]. این ویژگی، مشخصه بنیادی راه‌پیمایی تصادفی کلاسیک گسسته‌زمان است و ناشی از استقلال آماری گام‌های متوالی و فقدان هرگونه فاز یا تداخل است. برای گذار به توصیف کوانتومی سامانه، فضای حالت سامانه بسط داده می‌شود و علاوه بر مکان، یک درجه آزادی داخلی در نظر گرفته می‌شود. فضای حالت کلی به‌صورت ضرب تانسوری $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{position} \otimes \mathcal{H}_{coin}$ تعریف می‌شود و حالت پایه به‌شکل $|x\rangle \otimes |c\rangle$ نمایش داده می‌شود. تحول زمانی دیگر به‌صورت تصادفی تعریف نمی‌شود، بلکه توسط یک عملگر یکانی انجام می‌گیرد. تحول زمانی حالت کوانتومی از رابطه $|\psi(t+1)\rangle = \hat{U}|\psi(t)\rangle$ پیروی می‌کند. یکانی بودن $\hat{U}$ بقای نُرم حالت را تضمین می‌کند و امکان برهم‌نهی حالت‌های مکانی را فراهم می‌سازد.

برای بررسی حد پیوسته، گام‌های زمانی Δt و مکانی Δx معرفی می‌شوند و هر کمیت گسسته $a_{j,m}$ با مقدار تابعی هموار $\tilde{a}(t, x)$ متناظر در نظر گرفته می‌شود [۳۹-۴۰]. این چارچوب، مؤلفه‌های موج حد مرتبه حول $\epsilon \rightarrow 0$ گسترش می‌یابند:

$$\psi^\pm(t \pm \Delta t, x) = \psi^\pm(t, x) + \mathcal{O}(\epsilon) \quad (۱)$$

$$\psi^\pm(t, x \mp \Delta x) = \psi^\pm(t, x) + \mathcal{O}(\epsilon^\delta) \quad (۲)$$

پارامترهای زاویه‌ای تحول یکانی، شامل θ ، ξ و ζ ، به گونه‌ای مقیاس‌بندی می‌شوند که

$$e^{i\xi} \cos \theta = 1 + \mathcal{O}(\epsilon^\beta) + \mathcal{O}(\epsilon^{\gamma\alpha}) \quad (۳)$$

$$e^{i\zeta} \sin \theta = \mathcal{O}(\epsilon^\alpha) \quad (۴)$$

مقیاس‌بندی غیر بدیهی و فیزیکی-زمانی حاصل می‌شود که $\alpha = \beta = \delta = 1$ زیرا در این حالت تمام ترم‌های بسط‌شده در معادلات حرکت از مرتبه یکسان برخوردارند و همگی در حد پیوسته نقش دارند. برای استخراج معادلات مؤثر، مختصات نال^۱ تعریف می‌شوند:

$$u^- = \frac{1}{\tau} \left(\frac{t}{\tau} - \frac{x}{\lambda} \right) \quad (۵)$$

$$u^+ = \frac{1}{\tau} \left(\frac{t}{\tau} + \frac{x}{\lambda} \right)$$

که مشتقات متناظر با این مختصات، به شکل زیر از تبدیل مختصات بدست می‌آیند.

$$\partial_- = \partial_{u^-} = \tau \partial_t - \lambda \partial_x \quad (۶)$$

$$\partial_+ = \partial_{u^+} = \tau \partial_t + \lambda \partial_x$$

ترکیب این مشتقات منجر به عملگر دالامبرتی می‌شود.

$$\partial_- \partial_+ = \tau^2 \partial_{tt} - \lambda^2 \partial_{xx} = \lambda^2 f \quad (۷)$$

$$f = \left(\frac{1}{C^2} \right) \partial_{tt} - \partial_{xx}$$

که در آن $C = \lambda/\tau$ به عنوان سرعت مؤثر تعریف می‌شود. در حد پیوسته، تحول دینامیکی سامانه را می‌توان به صورت یک معادله دیفرانسیلی خطی برای اسپینور دو مؤلفه‌ای ψ توصیف کرد که از اعمال عملگر تحول مؤثر متناظر با تعریف ارائه شده

از آنجا که عملگر تحول $\hat{U}$ یکانی است، شرط $\hat{U}^\dagger \hat{U} = I$ برقرار است. بنابراین برای هر حالت $|\psi(t)\rangle$ رابطه $\langle \psi(t) | \hat{U}^\dagger \hat{U} | \psi(t) \rangle = \langle \psi(t) | \psi(t) \rangle = 1$ را داریم، که نشان می‌دهد نرم حالت (و در نتیجه احتمال کل) در طول تحول زمانی پایسته است. علاوه بر این، چون $\hat{U}$ یک عملگر خطی روی فضای هیلبرت $\mathcal{H}_{\text{position}} \otimes \mathcal{H}_{\text{coin}}$ است، اگر حالت اولیه به صورت برهم‌نهی $|\psi(0)\rangle = \sum_x a_x |x\rangle \otimes |c\rangle$ باشد، تحول یکانی این ترکیب خطی را حفظ می‌کند و فازهای نسبی میان مؤلفه‌ها را نگه می‌دارد. همین حفظ فازهای نسبی منشأ تداخل کوانتومی و شکل‌گیری ساختار غیرکلاسیکی توزیع احتمال در راه‌پیمایی کوانتومی است. در این صورت‌بندی، توزیع احتمال مکان از مربع قدرمطلق دامنه کوانتومی به دست می‌آید $P(x, t) = |\langle x | \psi(t) \rangle|^2$ و شکل آن به حالت اولیه و انتخاب عملگر وابسته است. تفاوت کیفی این توزیع با توزیع کلاسیک ناشی از حضور فاز و برهم‌نهی است و مبنای تمایز راه‌پیمایی کوانتومی از راه‌پیمایی تصادفی کلاسیک را تشکیل می‌دهد [۴۲].

۳- راه‌پیمایی کوانتومی و نظریه میدان کوانتومی

دینامیک راه‌پیمایی کوانتومی گسسته با معرفی دو مؤلفه موج ψ^- و ψ^+ تعریف می‌شود که روی شبکه فضا-زمان گسسته $(t_j = j\Delta t, x_m = m\Delta x)$ مقدار می‌گیرند. حالت کلی سامانه در هر نقطه به صورت یک اسپینور دو مؤلفه‌ای نوشته می‌شود و احتمال کل با رابطه $\pi_j = \sum_m (|\psi_{j,m}^-|^2 + |\psi_{j,m}^+|^2)$ تعریف می‌شود که در تمام زمان‌ها پایسته است [۴۲-۴۵].

در راه‌پیمایی کوانتومی گسسته یک‌بعدی، فضای هیلبرت سامانه به صورت $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{position}} \otimes \mathcal{H}_{\text{coin}}$ تعریف می‌شود که در آن فضای سکه دوبعدی است. بنابراین حالت کلی سامانه را می‌توان به شکل $|\psi(t)\rangle = \sum_x (\psi_L(x, t) \otimes |x\rangle + \psi_R(x, t) \otimes |x\rangle)$ نوشت که در آن ψ_L و ψ_R دامنه‌های احتمال برای حرکت به چپ و راست هستند. احتمال حضور ذره در مکان x به صورت $P(x, t) = |\psi_L(x, t)|^2 + |\psi_R(x, t)|^2$ است و از آنجا که تحول زمانی توسط عملگر یکانی $\hat{U}$ انجام می‌شود، نرم کلی حالت $\sum_x P(x, t) = 1$ در تمام زمان‌ها پایسته باقی می‌ماند که بیانگر بقای احتمال کل است.

^۱ null coordinates

در رابطه (۱۰) به دست می‌آید. با فرافکنی این معادله بر مؤلفه‌های اسپینوری ψ^+ و ψ^- ، دستگاهی از معادلات دیفرانسیلی مرتبه اول برای هر مؤلفه حاصل می‌شود که به صورت زیر نوشته می‌شوند.

$$\partial_- \psi^- = (i\bar{\xi}\psi^- - (-1)^{p+1}\bar{\theta}e^{i\xi}\psi^+) \quad (۸)$$

$$\partial_+ \psi^+ = (i\bar{\xi}\psi^+ - (-1)^{p+1}\bar{\theta}e^{-i\xi}\psi^-) \quad (۹)$$

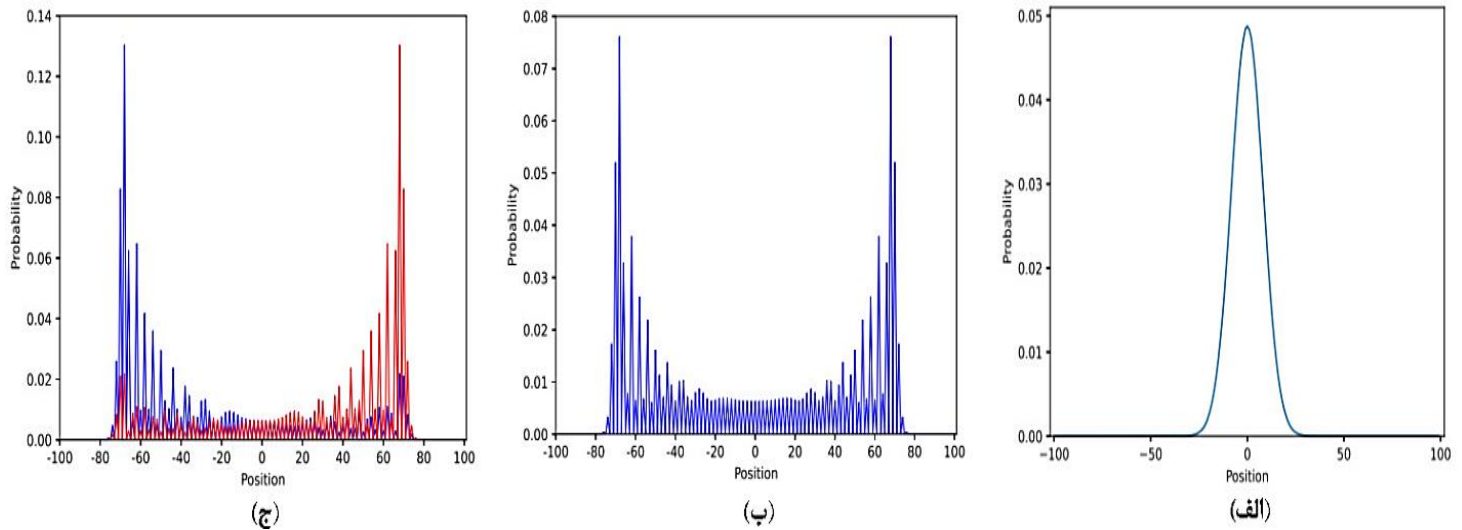
این معادلات را می‌توان به صورت فشرده در قالب یک معادله اپراتوری $\bar{D}\psi = 0$ نوشت که در آن $\psi = (\psi^-, \psi^+)^T$ و عملگر دیفرانسیلی $\bar{D}$ به شکل زیر تعریف می‌شود.

$$\begin{aligned} \bar{D} = & \Gamma^- \partial_- + \Gamma^+ \partial_+ - i\sigma^3 \bar{\xi} \\ & + i\sigma^2 (-1)^{p+1} \bar{\theta} \cos \bar{\xi} \\ & + i\sigma^1 (-1)^{p+1} \bar{\theta} \sin \bar{\xi} \end{aligned} \quad (۱۰)$$

در این رابطه $\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3$ ماتریس‌های پائولی‌اند و $\Gamma^\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \sigma^3)$ پروژکتورهای متناظر با آن‌ها هستند [۴۱]. با اعمال پروژکتورهای Γ^+ و Γ^- بر معادله اپراتوری $\bar{D}\psi = 0$ ، دستگاه معادلات (۸) و (۹) به عنوان فرم مؤلفه‌ای همین معادله به دست می‌آیند، بنابراین این دو رابطه صرفاً بیان مؤلفه‌ای دینامیک تعریف شده توسط عملگر دیفرانسیلی $\bar{D}$ هستند. علاوه بر این، در نقاطی که $\theta \neq 0$ ، هر یک از مؤلفه‌های ψ^+ و ψ^- به طور مستقل از یک معادله کلاین-گوردون تبعیت می‌کند، که مستقیماً از اعمال مجدد مشتقات $\pm \partial$ بر معادلات جفت شده نتیجه می‌شود. توزیع احتمال مکان، تمایز بنیادی میان راه‌پیمایی کلاسیکی و کوانتومی را به صورت مستقیم آشکار می‌کند. تمامی نتایج عددی ارائه شده در شکل‌های ۱ و ۲ بر اساس تعریف نهایی عملگر تحول کل مطابق با رابطه (۱۰) و با استفاده از همان قرارداد فازی در شبیه‌سازی‌ها محاسبه شده‌اند. در این مطالعه، نویز سخت‌افزار در چارچوب مدل نویز شبیه‌ساز و با در نظر گرفتن خطاهای متداول در معماری‌های ابررسانا، از جمله خطاهای گیت و دکوهرنس مؤثر، لحاظ شده است. برای ارزیابی کمی اثر نویز بر دینامیک سامانه، از معیار وفاداری هلینگر میان توزیع احتمال حالت ایده‌آل و حالت نویزی استفاده شده است. این معیار امکان سنجش میزان واگرایی توزیع‌های احتمال و در نتیجه میزان تخریب الگوی تداخل کوانتومی را فراهم می‌کند. هدف از بررسی گراف‌های کوچک در این کار، فراهم کردن مقایسه‌ای روشن میان تحول ایده‌آل و تحول نویزی و نشان دادن حساسیت دینامیک راه‌پیمایی کوانتومی به نویز در رژیم NISQ است. بررسی دقیق سهم کانال‌های مختلف خطا و تحلیل مقیاس‌پذیری سامانه، هرچند از موضوعات مهم در شبیه‌سازی‌های کوانتومی محسوب می‌شوند، از دامنه این مطالعه مقدماتی فراتر بوده و می‌توانند در مطالعات آینده مورد بررسی قرار گیرند. همان گونه که در شکل ۱ الف نمایش داده می‌شود، راه‌پیمایی گسسته‌زمان کلاسیکی منجر به توزیعی متقارن حول مبدأ می‌شود که بیشینه

احتمال در نزدیکی مرکز قرار دارد و با افزایش تعداد گام‌ها به تدریج پهن‌تر می‌شود. این رفتار، بازتاب ماهیت تصادفی و مستقل است و به یک توزیع دوجمله‌ای منتهی می‌شود که میانگین آن همواره صفر باقی می‌ماند. در مقابل، شکل ۱ ب توزیع احتمال حاصل از راه‌پیمایی کوانتومی گسسته‌زمان را برای همان تعداد گام نشان می‌دهد، با حالتی که درجات آزادی در یک برهم‌نهی متقارن مقداردهی اولیه می‌شود. در این حالت، توزیع احتمال دیگر بیشینه‌ای در مبدأ ندارد و ساختاری با دو قله غالب در نواحی دور از مرکز شکل می‌گیرد. این الگو مستقیماً از تداخل دامنه‌های کوانتومی ناشی می‌شود و نشان می‌دهد که دینامیک کوانتومی به گسترش بالستیک توزیع منجر می‌شود، بلکه گسترش بالستیک، نه انتشار پخشی کلاسیکی. وابستگی توزیع احتمال به حالات اولیه در شکل ۱ ج به وضوح قابل مشاهده است. مقداردهی اولیه‌ی حالت در $|0\rangle$ یا $|1\rangle$ موجب شکسته شدن تقارن توزیع و جابه‌جایی وزن احتمال به یک سمت محور مکان می‌شود. این حساسیت به حالت اولیه، ویژگی ذاتی راه‌پیمایی کوانتومی است و بیان می‌کند که حتی با عملگر تکامل یکسان، انتخاب حالت آغازین می‌تواند به الگوهای مکانی کاملاً متفاوت منجر شود. بنابراین، شکل‌های ۱ الف تا ج در کنار یکدیگر نشان می‌دهند که تفاوت میان رفتار کلاسیکی و کوانتومی نه صرفاً در مقدار پهنای توزیع، بلکه در ساختار، تقارن و وابستگی آن به حالت اولیه نهفته است [۴۶-۵۱].

۴-مقایسه‌ی راه‌پیمایی‌های کوانتومی شبیه‌سازی شده و تجربی

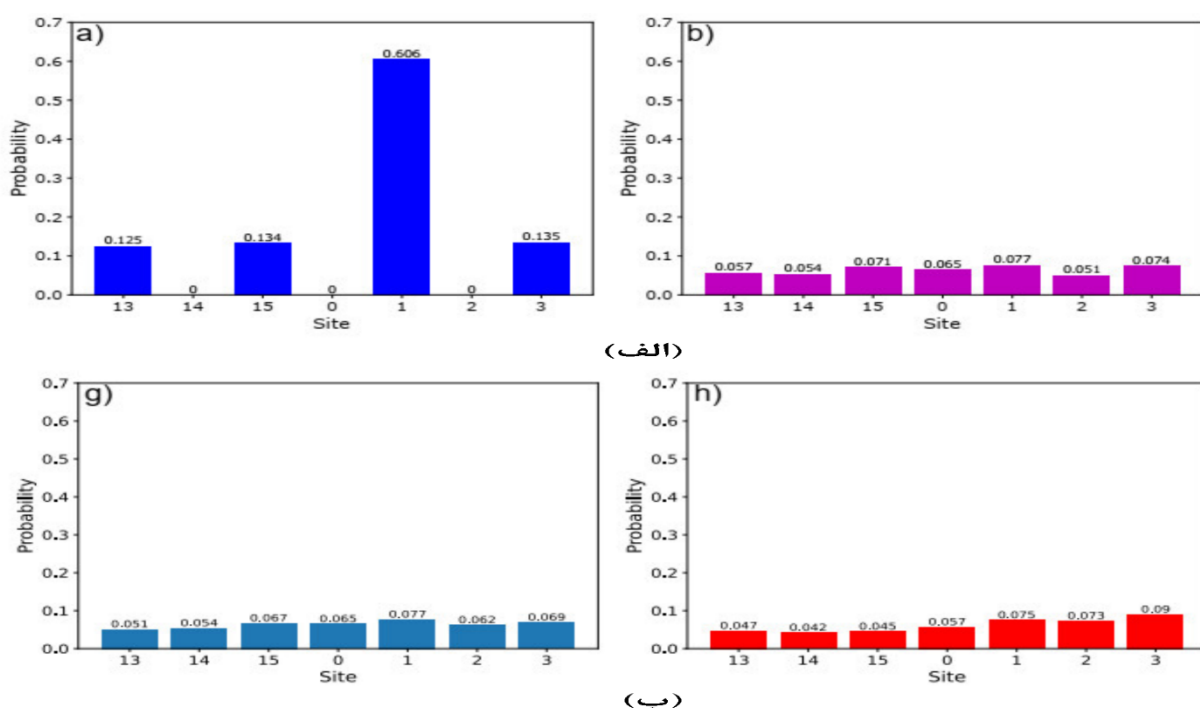


شکل ۱. توزیع احتمال (الف) در راه‌پیمایی تصادفی کلاسیک گسسته‌زمان (توزیع احتمال $P(x)$ برای یک راه‌پیمایی تصادفی کلاسیک گسسته‌زمان پس از ۱۰۰ گام)، (ب) در راه‌پیمایی کوانتومی گسسته‌زمان با حالت اولیه متقارن (توزیع احتمال $P(x)$ برای یک DTQW پس از ۱۰۰ گام با حالت اولیه $(|1\rangle + |10\rangle)/\sqrt{2}$ و (ج) وابستگی توزیع احتمال DTQW به حالت اولیه (توزیع احتمال $P(x)$ در DTQW پس از ۱۰۰ گام با مقایسه دو حالت اولیه $|10\rangle$ (قرمز) و $|1\rangle$ (آبی)) نشان داده شده است.

سطح نویز مؤثر به‌طور چشمگیری کاهش یابد. نتیجه کمی این تحلیل به‌صورت (کاهش نویز مورد نیاز $\sim 94\%$) به‌دست می‌آید تا خروجی تجربی بتواند به‌طور معنادار با پیش‌بینی‌های کوانتومی سازگار باشد [۵۵]. بنابراین، توزیع احتمال مکان به‌عنوان کمیت کلیدی مشاهده‌پذیر، ابزار اصلی برای تشخیص رفتار کوانتومی از نویز کلاسیک است و حساسیت این کمیت به نویز، محدودیت بنیادی اجرای راه‌پیمایی کوانتومی روی سخت‌افزارهای NISQ را آشکار می‌سازد [۵۶]. این نتایج نقش شبیه‌سازی عددی را به‌عنوان معیار مرجع و ضرورت بهبود مهندسی سخت‌افزار کوانتومی را برای تحقق دینامیک‌های کوانتومی غیرکلاسیکی برجسته می‌کنند. رفتار توزیع احتمال مکان به‌عنوان شاخص اصلی بقای دینامیک کوانتومی، به‌صورت مستقیم در مقایسه نتایج شبیه‌سازی ایده‌آل، مدل‌های نویز و داده‌های تجربی قابل مشاهده است [۵۷-۵۹]. همان‌گونه که در شکل‌های ۲ الف و ۲ ب نشان داده می‌شود، کاهش تدریجی شدت نویز منجر به بازیابی ساختارهای نامتقارن و قله‌های مشخص توزیع احتمال می‌شود که مشخصه راه‌پیمایی کوانتومی گسسته‌زمان هستند. در شبیه‌سازی با نویزهای ضعیف، همبستگی میان توزیع‌ها و نتیجه ایده‌آل افزایش می‌یابد، به‌طوری‌که معیار همبستگی به مقادیر نزدیک به واحد میل می‌کند، در حالی که در نویزهای بالاتر، این همبستگی به‌سرعت افت می‌کند و توزیع به‌شکلی تقریباً یکنواخت درمی‌آید و ویژگی فیزیکی متمایز خود را از دست می‌دهد.

اجرای راه‌پیمایی کوانتومی گسسته‌زمان روی سخت‌افزارهای کوانتومی واقعی با مقایسه مستقیم میان نتایج شبیه‌سازی ایده‌آل و داده‌های تجربی بررسی می‌شود. سامانه مورد مطالعه یک راه‌پیمایی کوانتومی روی گراف چرخه‌ای با ۱۶ گره است که با استفاده از ۵ کیوبیت پیاده‌سازی شده است [۵۲]. حالت سامانه پس از n گام زمانی با یک توزیع احتمال روی فضای مکان توصیف می‌شود. کمیت بنیادی قابل اندازه‌گیری، توزیع احتمال مکان است که به‌صورت $P(x) = \sum_c |\langle x, c | \psi \rangle|^2$ تعریف می‌شود. در این رابطه، x موقعیت روی گراف، c درجه آزادی داخلی، و $|\psi\rangle$ حالت نهایی سامانه پس از اعمال متوالی عملگر تحول است. این توزیع در حالت ایده‌آل، ساختاری نامتقارن و مشخصه راه‌پیمایی کوانتومی گسسته را نشان می‌دهد. برای ارزیابی اثرات نویز، مدل نویز به‌صورت یک پارامتر بدون بُعد η معرفی می‌شود که شدت نویز را به‌صورت درصدی از شدت نویز کامل سخت‌افزار واقعی بیان می‌کند، به‌طوری‌که $\eta = 100\%$ بیانگر نویز کامل دستگاه و $\eta = 0\%$ بیانگر دستگاه بدون نویز است. با افزایش η ، توزیع احتمال $P(x)$ به‌تدریج ساختار کوانتومی خود را از دست می‌دهد و به یک توزیع تصادفی بدون ویژگی فیزیکی متمایز تبدیل می‌شود. نتایج عددی نشان می‌دهد که حتی در مقادیر نسبتاً کوچک نویز، تغییرات کیفی شدیدی رخ می‌دهد [۵۳]. در حدود $\eta \approx 10\%$ توزیع احتمال به‌گونه‌ای تغییر می‌کند که دیگر قابل تمایز از نویز تصادفی نیست و هیچ شباهتی با توزیع مورد انتظار یک راه‌پیمایی کوانتومی نامتقارن ندارد. در این ناحیه، تداخل‌های کوانتومی که منشأ رفتار غیرکلاسیکی هستند، عملاً از بین می‌روند. در مقابل، در شبیه‌ساز Qasm^۱، راه‌پیمایی کوانتومی تا حدود $\eta \approx 6\%$ همچنان قابل تشخیص باقی می‌ماند و توزیع احتمال ویژگی‌های کیفی DTQW را حفظ می‌کند. این مقایسه نشان می‌دهد که محدودیت اصلی در اجرای تجربی، نه الگوریتم راه‌پیمایی کوانتومی، بلکه سطح نویز سخت‌افزار است [۵۴]. برای سخت‌افزار واقعی IBM (دستگاه Santiago)، تحلیل داده‌ها نشان می‌دهد که برای اجرای یک DTQW شامل ۸ گام زمانی روی گراف ۱۶‌گره‌ای، لازم است

^۱ Qasm_simulator



شکل ۲. الف) توزیع احتمال DTQW سه گامی روی گراف چرخه ای ۱۶ گرهی (توزیع احتمال $P(x)$ برای DTQW سه گامی روی گراف چرخه ای ۱۶ گرهی در شبیه ساز (a) qasm و با مدل نوین (b) IBM نمایش داده می شود) و ب) وابستگی توزیع احتمال DTQW به شدت نوین (توزیع احتمال $P(x)$ برای DTQW سه گامی روی گراف ۱۶ گرهی برای شدت های مختلف نوین از ۰٪ تا ۱۰۰٪ و سخت افزار Santiago (قرمز) مقایسه می شود).

معادله دیراک برای یک ذره آزاد در فضای $1+1$ بعدی را بازتولید کند. سپس این چارچوب در قالب مدارهای کوانتومی برای یک سامانه ی پنج کیوبیتی که گرانی با ۱۶ گره را نمایش می دهد پیاده سازی شد تا رفتار دینامیک سامانه و توزیع احتمال حاصل از راه پیمایی کوانتومی در شرایط ایده آل و در حضور نوین سخت افزاری بررسی شود.

برای ارزیابی کمی میزان انحراف نتایج از حالت ایده آل، از وفاداری هلینگر به عنوان معیار مقایسه میان توزیع های احتمال استفاده شد. این سنجه امکان مقایسه ی نظام مند میان نتایج شبیه سازی ایده آل، مدل های نویزی و داده های حاصل از اجرا روی سخت افزارهای کوانتومی را فراهم می سازد و از این طریق میزان تأثیر نوین بر دینامیک پیاده سازی شده را به طور کمی مشخص می سازد. نتایج به دست آمده نشان می دهند که در معماری های کوانتومی کنونی از نوع NISQ، نوین سخت افزاری می تواند به طور قابل توجهی ساختارهای تداخلی توزیع احتمال را تضعیف کند و باعث کاهش وفاداری میان توزیع های احتمال ایده آل و نتایج تجربی شود. این موضوع نشان می دهد که حتی برای مدل های ساده و بدون برهم کنش نیز کیفیت سخت افزار و سطح نوین نقش تعیین کننده ای در قابلیت تفسیر نتایج شبیه سازی ایفا می کنند.

شکل ۲ ب به طور خاص نشان می دهد که در برخی مقادیر نوین میانی، مانند نوین ۶٪، رفتار غیرمنتظره ای ظاهر می شود؛ برای مثال کاهش غیرعادی احتمال در یک سایت خاص که با روند کلی کاهش نوین سازگار نیست و به یک ناهنجاری آماری یا اثرات سخت افزاری خاص اشاره می کند. مقایسه مستقیم میان مدل نوین سفارشی، مدل نوین IBM و داده های دستگاه واقعی در شکل ۲ الف نشان می دهد که حتی یک مدل نوین ساده دیپولاریزه شده می تواند با دقت بالایی رفتار دستگاه واقعی را بازتولید کند، که این امر بر غالب بودن خطاهای دیپولاریزه کننده در اجرای تجربی دلالت دارد. بنابراین، شکل ها نه تنها شاهد بصری نتایج عددی هستند، بلکه مستقیماً نشان می دهند که مرز عملی مشاهده رفتار کوانتومی در راه پیمایی های گسسته را نوین سخت افزاری تعیین می کند و بدون کنترل آن، حتی ساختارهای بنیادی DTQW نیز از بین می روند [۶۰-۶۲].

۵- نتیجه گیری

در این پژوهش امکان مدل سازی یک دینامیک نسبیتی گسسته با استفاده از راه پیمایی کوانتومی گسسته زمان و پیاده سازی آن بر بستر کامپیوترهای کوانتومی دیجیتال مورد بررسی قرار گرفت. در چارچوب معرفی شده، تحول زمانی سامانه از طریق عملگرهای یکانی تعریف می شود و نشان داده شد که با انتخاب مناسب پارامترها و در حد پیوسته، این مدل گسسته می تواند دینامیک مؤثری متناظر با

[۶] P. W. Shor. Polynomial-time algorithms for prime factorization and discrete logarithms on a quantum computer. *SIAM Journal on Computing*, ۲۶(۵):۱۴۸۴-۱۵۰۹, Oct ۱۹۹۷.

[۷] L. K. Grover. A fast quantum mechanical algorithm for database search. In *Proceedings of the Twenty-Eighth Annual ACM Symposium on Theory of Computing, STOC '۹۶*, page ۲۱۲-۲۱۹, New York, NY, USA, ۱۹۹۶. Association for Computing Machinery.

[۸] S. Lloyd. Universal quantum simulators. *Science*, ۲۷۳(۵۲۷۸):۱۰۷۳-۱۰۷۸, ۱۹۹۶.

[۹] J. W. Pan, K. Mattle, D. Bouwmeester, et al. Experimental quantum teleportation. *Nature*, ۳۹۰(۶۶۶۰):۵۷۵-۵۷۹, Dec ۱۹۹۷.

[۱۰] D. G. Cory, M. D. Price, W. Maas, E. Knill, R. Laflamme, W. H. Zurek, T. F. Havel, and S. S. Somaroo. Experimental quantum error correction. *Phys. Rev. Lett.*, ۸۱:۲۱۵۲-۲۱۵۵, Sep ۱۹۹۸.

[۱۱] L. M. K. Vandersypen, M. Steffen, G. Breyta, C. S. Yannoni, M. H. Sherwood, and I. L. Chuang. Experimental realization of shor's quantum factoring algorithm using nuclear magnetic resonance. *Nature*, ۴۱۴(۶۸۶۶):۸۸۳-۸۸۷, Dec ۲۰۰۱.

[۱۲] L. Tian, R. Blatt, and P. Zoller. Scalable ion trap quantum computing without moving ions. *The European Physical Journal D*, ۳۲(۲):۲۰۱-۲۰۸, Nov ۲۰۰۴.

[۱۳] C. Rigetti, J. M. Gambetta, S. Poletto, B. L. T. Plourde, J. M. Chow, A. D. C'orcoles, J. A. Smolin, S. T. Merkel, J. R. Rozen, G. A. Keefe, et al. Superconducting qubit in a waveguide cavity with a coherence time approaching ۰.۱ ms. *Physical Review B*, ۸۶(۱۰), Sep ۲۰۱۲.

[۱۴] J. Preskill. Quantum computing in the NISQ era and beyond. *Quantum*, ۲:۷۹, Aug ۲۰۱۸.

[۱۵] D. Zhang. Exact solution for three-dimensional ising model. *Symmetry*, ۱۲(۱۰), ۲۰۲۱.

[۱۶] S. P. Jordan, K. S. Lee, and J. Preskill. Quantum algorithms for quantum field theories. *Science*, ۳۳۶(۶۰۸۵):۱۱۳۰-۱۱۳۳, ۲۰۱۲.

[۱۷] K. G. Wilson. Ab Initio Quantum Chemistry: A Source of Ideas for Lattice Gauge Theorists. *Nucl. Phys. B Proc. Suppl.*, ۱۷:۸۲-۹۲, ۱۹۹۰.

نتایج این مطالعه نشان می‌دهد که برای تحلیل و تفسیر شبیه‌سازی‌های کوانتومی در سامانه‌های نویزی، تعریف یک معیار کمی مناسب برای مقایسه توزیع‌های احتمال اهمیت اساسی دارد. در این چارچوب، وفاداری هلینگر ابزاری مناسب برای سنجش میزان انحراف نتایج از حالت ایده‌آل فراهم می‌کند و امکان ارزیابی کمی اثر نويز در پیاده‌سازی‌های تجربی را فراهم می‌سازد. از این رو، چنین سنجه‌هایی می‌توانند نقش مهمی در ارزیابی قابلیت اجرای مدل‌های دینامیکی ساده روی سخت‌افزارهای کوانتومی کنونی ایفا کنند.

در عین حال، مدل مورد بررسی در این پژوهش یک مدل ساده‌شده مبتنی بر راه‌پیمایی کوانتومی است که تنها دینامیک مؤثر یک ذره آزاد در فضای ۱+۱ بعدی را بازنمایی می‌کند و شامل برهم‌کنش‌ها یا درجات آزادی چندذره‌ای نیست. بنابراین نتایج ارائه‌شده باید به‌عنوان یک مطالعه مقدماتی برای بررسی امکان پیاده‌سازی چنین مدل‌هایی در معماری‌های NISQ و ارزیابی کمی اثر نويز بر دینامیک گسسته تفسیر شوند. در ادامه‌ی این مسیر پژوهشی، گسترش این چارچوب به سامانه‌های چندذره‌ای، در نظر گرفتن روابط پادجابه‌جایی فرمیونی، افزودن برهم‌کنش‌ها و بررسی هندسه‌های شبکه‌ای در ابعاد بالاتر می‌تواند گام‌های مهمی در جهت توسعه مدل‌های واقع‌بینانه‌تر باشد. تحقق چنین اهدافی مستلزم پیشرفت هم‌زمان در طراحی الگوریتم‌های کوانتومی، بهینه‌سازی مدارها و بهبود کیفیت سخت‌افزارهای کوانتومی با کاهش نويز و افزایش زمان همدوسی است.

منابع

[۱] R. P. Feynman. Simulating physics with computers. *International Journal of Theoretical Physics*, ۱۹۸۲.

[۲] D. Deutsch. Quantum theory, the church-turing principle and the universal quantum computer. *Proc. R. Soc. Lond.*, ۱۹۸۵.

[۳] D. Deutsch and R. Jozsa. Rapid solution of problems by quantum computation. *Proceedings: Mathematical and Physical Sciences*, ۴۳۹(۱۹۰۷):۵۵۳-۵۵۸, ۱۹۹۲.

[۴] E. Bernstein and U. Vazirani. Quantum complexity theory. In *Proceedings of the TwentyFifth Annual ACM Symposium on Theory of Computing, STOC '۹۳*, page ۱۱-۲۰, New York, NY, USA, ۱۹۹۳. Association for Computing Machinery.

[۵] D. Simon. On the power of quantum computation. In *Proceedings ۳۵th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, pages ۱۱۶-۱۲۳, ۱۹۹۴.

- [۳۲] E. Farhi and S. Gutmann. Quantum computation and decision trees. *Physical Review A*, ۵۸(۲):۹۱۵-۹۲۸, Aug ۱۹۹۸.
- [۳۳] T. Jacobson and L. Schulman. Quantum stochastics: the passage from a relativistic to a non-relativistic path integral. *Journal of Physics A*, ۱۷:۳۷۵-۳۸۳, ۱۹۸۴.
- [۳۴] W. E. Boyce and R. C. Prima. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. John Wiley and Sons, ۹th edition, ۲۰۲۱.
- [۳۵] T. A. Jacobson. Spinor chain path integral for the dirac electron. ۱۹۸۳.
- [۳۶] A. Kull and R. Treumann. On the path integral of the relativistic electron. *International Journal of Theoretical Physics*, ۲۸:۱۴۲۳-۱۴۲۸, ۱۹۹۹.
- [۳۷] N. Konno, T. Namiki, and T. Soshi. Symmetry of distribution for the one-dimensional hadamard walk. *Interdisciplinary Information Sciences*, ۱۰(۱):۱۱-۲۲, ۲۰۰۴.
- [۳۸] N. Konno. Quantum random walks in one dimension. *Quantum Information Processing*, ۱(۵):۳۴۵-۳۵۴, ۲۰۰۲.
- [۳۹] P. L. Knight, E. Roldán, and J. E. Sipe. Quantum walk on the line as an interference phenomenon. *Physical Review A*, ۶۸(۲), Aug ۲۰۰۳.
- [۴۰] P. Blanchard and M.-O. Hongler. Quantum random walks and piecewise deterministic evolutions. *Phys. Rev. Lett.*, ۹۲:۱۲۰۶۰۱, Mar ۲۰۰۴.
- [۴۱] C. M. Chandrashekar, S. Banerjee, and R. Srikanth. Relationship between quantum walks and relativistic quantum mechanics. *Phys. Rev. A*, ۸۱:۰۶۲۳۴۰, Jun ۲۰۱۰.
- [۴۲] G. Di Molfetta, M. Brachet, and F. Debbasch. Quantum walks in artificial electric and gravitational fields. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, ۳۹۷:۱۵۷-۱۶۸, Mar ۲۰۱۴.
- [۴۳] G. Di Molfetta, L. Honter, B. B. Luo, T. Wada, and Y. Shikano. Massless dirac equation from fibonacci discrete-time quantum walk. *Quantum Studies: Mathematics and Foundations*, ۲(۳):۲۴۳-۲۵۲, Apr ۲۰۲۴.
- [۴۴] P. Arnault, G. Di Molfetta, M. Brachet, and F. Debbasch. Quantum walks and nonabelian
- [۱۸] E. Learmann. Recent results from lattice qcd simulations. *Nuclear Physics A*, ۶۱۰:۱-۱۲, ۱۹۹۶. *Quark Matter* ۹۶.
- [۱۹] S. Aoki, T. Hatsuda, and N. Ishii. Theoretical Foundation of the Nuclear Force in QCD and Its Applications to Central and Tensor Forces in Quenched Lattice QCD Simulations. *Progress of Theoretical Physics*, ۱۲۳(۱):۸۹-۱۲۸, ۰۱ ۲۰۱۰.
- [۲۰] S. Schaefer, R. Sommer, and F. Virota. Critical slowing down and error analysis in lattice qcd simulations. *Nuclear Physics B*, ۸۴۵(۱):۹۳-۱۱۹, ۲۰۱۱.
- [۲۱] K. G. Wilson. The renormalization group: Critical phenomena and the kondo problem. *Rev. Mod. Phys.*, ۴۷:۷۷۳-۸۴۰, Oct ۱۹۷۵.
- [۲۲] K. Marshall, R. Pooser, G. Siopsis, and C. Weedbrook. Quantum simulation of quantum field theory using continuous variables. *Phys. Rev. A*, ۹۲:۰۶۳۸۲۵, Dec ۲۰۱۵.
- [۲۳] J. Preskill. Simulating quantum field theory with a quantum computer, ۲۰۱۸.
- [۲۴] A. H. Moosavian and S. Jordan. Faster quantum algorithm to simulate fermionic quantum field theory. *Physical Review A*, ۹۸(۱):۰۱۲۳۳۲, ۲۰۱۸.
- [۲۵] N. Klco, M. J. Savage, and J. R. Stryker. $Su(2)$ non-abelian gauge field theory in one dimension on digital quantum computers. *Physical Review D*, ۱۰۱(۷), Apr ۲۰۲۰.
- [۲۶] N. Shenvi, J. Kempe, and K. B. Whaley. Quantum random-walk search algorithm. *Physical Review A*, ۶۷(۵), May ۲۰۰۳.
- [۲۷] A. Ambainis. Quantum random walks - new method for designing quantum algorithms. In *SOFSEM*, ۲۰۰۸.
- [۲۸] A. M. Childs, R. Cleve, E. Deotto, E. Farhi, S. Gutmann, and D. A. Spielman. Exponential algorithmic speedup by a quantum walk. *Proceedings of the thirty-fifth ACM symposium on Theory of computing - STOC* ۲۰۲۳, ۲۰۰۳.
- [۲۹] A. M. Childs. Universal computation by quantum walk. *Phys. Rev. Lett.*, ۱۰۲:۱۸۰۵۰۱, May ۲۰۰۹.
- [۳۰] N. B. Lovett, S. Cooper, M. Everitt, M. Trevers, and V. Kendon. Universal quantum computation using the discrete-time quantum walk. *Physical Review A*, ۸۱(۴), Apr ۲۰۱۰.
- [۳۱] E. W. Montroll and G. H. Weiss. Random walks on lattices. ii. *Journal of Mathematical Physics*, ۶(۲):۱۶۷-۱۸۱, ۱۹۶۵.

observations of 1d quantum walks in a limited region. *Quantum Information Processing*, 18, 2019.

[55] A. Politi, M. J. Cryan, J. G. Rarity, S. Yu, and J. L. O'Brien. Silica-on-silicon waveguide quantum circuits. *Science*, 320(5876):1661-1664, May 2008.

[56] R. Matjeschk, C. Schneider, M. Enderlein, T. Huber, H. Schmitz, J. Glueckert, and T. Schaetz. Experimental simulation and limitations of quantum walks with trapped ions. *New Journal of Physics*, 14:035012, 2012.

[57] M. Ware. Flux-tunable superconducting transmons for quantum information processing. PhD thesis, Syracuse University, 2015.

[58] H.-L. Huang, D. Wu, D. Fan, and X. Zhu. Superconducting quantum computing: A review, 2020.

[59] A. P. M. Place, L. V. H. Rodgers, P. Mundada, B. M. Smitham, M. Fitzpatrick, Z. Leng, A. Premkumar, J. Bryon, A. Vrajitoarea, S. Sussman, and et al. New material platform for superconducting transmon qubits with coherence times exceeding 0.3 milliseconds. *Nature Communications*, 12(1), Mar 2021.

[60] C. Wang, M.-C. Chen, C.-Y. Lu, and J.-W. Pan. Optimal readout of superconducting qubits exploiting high-level states. *Fundamental Research*, 1(1):16-21, 2021.

[61] E. Wilson, F. Mueller, L. Bassman, and C. Iancu. Empirical evaluation of circuit approximations on noisy quantum devices, 2021.

[62] G. D. Molfetta and F. Debbasch. Discrete-time quantum walks in random artificial gauge fields, 2016.

discrete gauge theory. *Physical Review A*, 94(1), Jul 2016.

[63] P. Arrighi, G. Di Molfetta, I. M'arquez-Martín, and A. Pérez. Dirac equation as a quantum walk over the honeycomb and triangular lattices. *Physical Review A*, 97(6), Jun 2018.

[64] P. Arrighi, G. D. Molfetta, I. M'arquez-Martín, and A. Pérez. From curved spacetime to spacetime-dependent local unitaries over the honeycomb and triangular quantum walks, 2018.

[65] G. di Molfetta and F. Debbasch. Discrete-time quantum walks: Continuous limit and symmetries. *Journal of Mathematical Physics*, 53(12):122302, Dec 2012.

[66] M. A. Nielsen and I. L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press, 10th edition, 2010.

[67] J. Koch, T. M. Yu, J. Gambetta, A. A. Houck, D. I. Schuster, J. Majer, A. Blais, M. H. Devoret, S. M. Girvin, and R. J. Schoelkopf. Charge-insensitive qubit design derived from the cooper pair box. *Phys. Rev. A*, 76:042319, Oct 2007.

[68] W. Oliver and P. Welander. Materials in superconducting quantum bits. *Mrs Bulletin*, 38:816-825, 2013.

[69] A. Blais, J. Gambetta, A. Wallraff, D. I. Schuster, S. M. Girvin, M. H. Devoret, and R. J. Schoelkopf. Quantum-information processing with circuit quantum electrodynamics. *Phys. Rev. A*, 75:032319, Mar 2007.

[70] F. Yan. Coherence Characterization with a Superconducting Flux Qubit through NMR Approaches. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, 2013.

[71] B. L. Douglas and J. B. Wang. Efficient quantum circuit implementation of quantum walks, 2009.

[72] H. Xiao-Chuan, F. Lan-Tian, L. Yu-Xuan, Z. Lan-Xuan, S. Jung-Feng, and Z. YongSheng. Experimental



Simulation of Effective Dirac Dynamics via Quantum Walks on Digital Quantum Computers

Zeynab Kiamehr

Department of Physics, Tafresh University, Tafresh, Iran

Article details

Received: ۲۰۲۶/۰۲/۰۹

Accepted: ۲۰۲۶/۰۹/۲۷

Published: ۲۰۲۶/۰۹/۳۰

eSSN: ۲۵۸۸-۴۹۳X

ISSN: ۲۵۸۸-۴۸۲۱

Correspondence email:

z.kiamehr@tafreshu.ac.ir

DOI:

۱۰.۲۲۰۳۴/jmrph.۲۰۲۶.۱

۲۲۹۱۹.۰

Abstract

Quantum field theory provides the fundamental framework for describing particles and fields in modern physics. However, obtaining exact solutions for many of its models (particularly in non-perturbative regimes) poses significant challenges for both analytical approaches and classical numerical methods. One promising route for studying such systems is quantum simulation, in which the dynamics of a physical model are represented using controllable quantum systems. In this work, we investigate the possibility of modeling a discrete framework for relativistic dynamics using a discrete-time quantum walk and implementing it on digital quantum computers. Within this framework, the time evolution of the system is defined through unitary operators, and it is shown that, in the continuum limit and with appropriate scaling in space and time, this discrete model can reproduce effective dynamics corresponding to the Dirac equation for a free particle in $1+1$ dimensions. The model is then implemented in the form of quantum circuits on a small system consisting of five qubits representing a graph with 16 nodes, allowing the dynamical behavior and the interference structure of the probability distribution generated by the quantum walk to be examined under both ideal conditions and in the presence of noise. To quantitatively evaluate deviations in the results, the Hellinger fidelity is employed as a metric for comparing probability distributions, enabling a systematic assessment of the differences between ideal simulations, noisy models, and results obtained from executions on quantum hardware. The results indicate that in current noisy intermediate-scale quantum (NISQ) architectures, hardware noise can significantly suppress the interference structure of the probability distribution and reduce the resulting fidelity of the implementation. This study highlights that a quantitative evaluation of noise effects is essential for interpreting the outcomes of such simulations. It also suggests that quantum walks can serve as a suitable framework for preliminary investigations of discrete relativistic dynamics on small quantum systems. Consequently, the results of this work may be viewed as an initial step toward assessing the feasibility of implementing simplified models related to quantum field dynamics on noisy quantum hardware.

Keywords: Quantum Simulation, Quantum Field Theory, Quantum Walk, Hellinger Fidelity, Quantum Hardware Noise.