

بررسی ارتباط بین غیر کلاسیکی در اندازه‌گیری ضعیف با غیر کلاسیکی گلاوبر برای نور گرمایی

الهام رفیعی‌پور، سعید باطبی*

دانشگاه گیلان، گروه فیزیک

محمد رضا بذرافکن؛ دانشگاه بین‌المللی امام خمینی، گروه فیزیک

دریافت: ۹۸/۱/۲۷

پذیرش: ۹۸/۹/۴

چکیده

دنباله‌ای از گشتاورهای یک مشاهده‌پذیر که به طور ضعیف اندازه‌گیری شده‌اند، می‌تواند به یک شبه‌توزیع مشروط مرتبط باشد. بر اساس رفتار احتمالاتی این شبه‌توزیع، اخیراً تعریف جدیدی از غیر کلاسیکی حالت سامانه بر حسب اندازه‌گیری‌های ضعیف ارائه شده است. در این مقاله، با استفاده از این تعریف، شاهدی غیر کلاسیکی بودن حالت‌های گرمایی در اندازه‌گیری ضعیف تکانه \hat{p} بررسی می‌شود. برای این منظور، اندازه‌گیری ضعیف تکانه \hat{p} مشروط به خروجی اندازه‌گیری قوی مکان \hat{q} روی سامانه هدف در نظر گرفته می‌شود و مقادیر ضعیف شبه‌گشتاورهای تکانه \hat{p} در حالت‌های گرمایی محاسبه می‌شوند. سپس شواهد غیر کلاسیکی حالت‌های گرمایی به عنوان تابعی از q رسم می‌شوند. با استفاده از نتایج عددی، نواحی به دست می‌آیند که حالت‌های گرمایی در این نواحی به طور غیر کلاسیکی رفتار می‌کنند. همچنین، شبه‌توزیع مشروط در اندازه‌گیری‌های ضعیف بر حسب شبه‌توزیع گلاوبر و شبه‌توزیع ویگنر حالت محاسبه می‌شود. سپس تفاوت بین غیر کلاسیکی بر اساس تعریف گلاوبر و غیر کلاسیکی در اندازه‌گیری‌های ضعیف بیان می‌شود. با استفاده از توزیع گلاوبر حالت‌های گرمایی، شبه‌توزیع مشروط مرتبط با گشتاورهای تکانه \hat{p} محاسبه و نشان داده می‌شود که چرا حالت‌های کلاسیک در اندازه‌گیری‌های ضعیف به طور غیر کلاسیکی رفتار می‌کنند.

واژگان کلیدی: شبه‌توزیع، غیر کلاسیکی بودن، اندازه‌گیری‌های ضعیف، مقادیر ضعیف، شبه‌توزیع گلاوبر

مقدمه

عملگر چگالی میدان تابشی کوانتیده تک مد می‌تواند به صورت قطری بر حسب حالت‌های همدوس بسط داده شود [۱، ۲]:

$$\hat{\rho} = \int d^2\alpha P \alpha |\alpha\rangle\langle\alpha|, \quad (1)$$

که تابع وزن $P \alpha$ به عنوان توزیع P گلاوبر-سودارشان حالت معروف است. بر اساس تعریف غیر کلاسیکی گلاوبر [۳، ۴]، اگر توزیع P یک حالت کوانتومی تابعی منفی‌پذیر در فضای فاز باشد یا این که یک تابع تعمیم یافته تکین‌تر از

*نویسنده مسئول: s_batebi@guilan.ac.ir

تابع دلتا باشد، حالت مورد نظر به عنوان حالت غیر کلاسیک در نظر گرفته می‌شود. مطابق این تعریف حالت‌های گرمایی با توزیع P مثبت [۵]:

$$P \propto \frac{1}{\pi n} e^{-\frac{|\alpha|^2}{n}} \quad (2)$$

نسبت به تعریف گلاوبر کلاسیک محسوب می‌شوند. اندازه‌گیری‌های ضعیف برای سیستم‌های کلاسیکی نشان می‌دهند که مقادیر ضعیف، میانگین متغیر دینامیکی اندازه‌گیری شده نسبت به یک توزیع مشروط هستند [۶]. بنابراین هر متغیر دینامیکی مثبت باید مقدار ضعیف مثبتی داشته باشد. با این وجود در برخی از حالت‌های کوانتومی مقادیر ضعیف یک مشاهده‌پذیر مثبت مقادیر منفی می‌گیرند. بر این اساس در مقالات [۷-۹]، منفی‌پذیری مقادیر ضعیف یک مشاهده‌پذیر مثبت به عنوان شاهد غیر کلاسیکی بودن حالت سامانه در اندازه‌گیری‌های ضعیف مطرح شده است. این حالت‌ها با عنوان "حالت‌های غیر کلاسیک بر حسب اندازه‌گیری‌های ضعیف" شناخته شده‌اند. از طرفی دنباله‌ای از گشتاورهای یک مشاهده‌پذیر که به طور ضعیف اندازه‌گیری شده‌اند، می‌تواند به یک شبه‌توزیع مشروط نسبت داده شود. بر اساس رفتار احتمالاتی این شبه‌توزیع، اخیراً تعریف جدیدی از غیر کلاسیکی حالت سامانه در اندازه‌گیری‌های ضعیف ارائه شده است [۱۰]. این تعریف، مفهوم غیر کلاسیکی در اندازه‌گیری‌های ضعیف را تعمیم می‌دهد و تنها به مثبت بودن مشاهده‌پذیری اندازه‌گیری ضعیف می‌شود، متکی نیست.

در این مقاله با استفاده از تعریفی که در مرجع [۱۰] ارائه شده است به بررسی غیر کلاسیکی حالت‌های گرمایی در اندازه‌گیری‌های ضعیف پرداخته می‌شود. همچنین با بررسی ارتباط غیر کلاسیکی گلاوبر و غیر کلاسیکی در اندازه‌گیری ضعیف به این سوال پاسخ داده می‌شود که چه دلایلی منجر می‌شود حالت‌هایی مانند حالت‌های گرمایی، که بنا بر تعریف گلاوبر کلاسیک محسوب می‌شوند، در اندازه‌گیری‌های ضعیف به طور غیر کلاسیکی رفتار کنند.

غیر کلاسیکی در اندازه‌گیری ضعیف پس‌گزینش‌گر

فرض کنید \hat{s} مشاهده‌پذیر مورد اندازه‌گیری سامانه هدف باشد. در یک اندازه‌گیری تصویرگر، ابزار اندازه‌گیری، یا نشانگر، با عملگرهای مکان و تکانه، P, \hat{X} ، توسط هامیلتونی تکانشی $\hat{H} = \varepsilon \delta t \hat{s} \otimes \hat{P}$ با سامانه هدف برهمکنش می‌کند. در این صورت با فرض این که عدم قطعیت اولیه مکان نشانگر خیلی کوچک باشد، با اندازه‌گیری تابع توزیع $\text{Pr } X$ ابزار، ویژه مقادیر متفاوت مشاهده‌پذیر \hat{s} و احتمالات آن‌ها به دست می‌آید. اندازه‌گیری‌های ضعیف [۱۱-۱۴] مانند اندازه‌گیری‌های تصویرگر انجام می‌شوند، اما با این فرض که عدم قطعیت مکان نشانگر خیلی بزرگ باشد. در این صورت $\text{Pr } X$ مقدار چشم‌داشتی $\langle \hat{s} \rangle$ را به درستی نشان می‌دهد، اگر چه ویژه مقادیر \hat{s} قابل تشخیص نخواهند بود [۱۵]. در صورتی که بعد از برهمکنش، اندازه‌گیری تصویرگر مشاهده‌پذیر دیگری مانند \hat{q} روی سامانه هدف

انجام شود، با استفاده از جابه جایی توزیع مشروط $\text{Pr}' X$ نسبت به شکل اولیه آن، قسمت حقیقی مقدار ضعیف \hat{s} که به صورت زیر تعریف می شود،

$$\langle \hat{s} \rangle_{w,q} = \frac{\langle q | \hat{s} \hat{\rho}_s | q \rangle}{\langle q | \hat{\rho}_s | q \rangle} \quad (۳)$$

اندازه گیری می شود [۱۶]. در این رابطه $\hat{\rho}_s$ حالت اولیه سامانه هدف می باشد. در مرجع [۱۰] با تعریف شبه توزیع مشروط $\mu_{w,q} s$ به صورت

$$\mu_{w,q} s = \text{Re} \langle \delta s - \hat{s} \rangle_{w,q} = \text{Re} \frac{\langle q | s \rangle \langle s | \hat{\rho}_s | q \rangle}{\langle q | \hat{\rho}_s | q \rangle} \quad (۴)$$

تعریف جدیدی از غیر کلاسیکی حالت سامانه در اندازه گیری های ضعیف ارائه شده است. مطابق این تعریف در صورتی که $\mu_{w,q} s$ ویژگی های یک تابع توزیع احتمال واقعی را نداشته باشد، حالت کوانتومی $\hat{\rho}$ سامانه هدف در اندازه گیری ضعیف \hat{s} با پس گزینش گری ویژه حالت های \hat{q} غیر کلاسیک است. همچنین با تعریف $\Phi_{w,q} k$ به صورت

$$\Phi_{w,q} k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{ik^n}{n!} \text{Re} \langle \hat{s}^n \rangle_{w,q} = \frac{1}{2} \langle e^{iks} \rangle_{w,q} + \langle e^{-iks} \rangle_{w,q}^* \quad (۵)$$

به شبه توزیع مشروط $\mu_{w,q} s$ یک تابع مشخصه نسبت داده می شود به طوری که :

$$\mu_{w,q} s \equiv \text{Re} \langle \delta s - \hat{s} \rangle_{w,q} = \int \frac{dk}{2\pi} \Phi_{w,q} k e^{-iks} \quad (۶)$$

همچنین با استفاده از قضیه بوخنر مجموعه ای از شرایط کافی برای غیر کلاسیکی بودن حالت های کوانتومی بر حسب گشتاورهای $\text{Re} \langle \hat{s}^n \rangle_{w,q}$ معرفی شده است [۱۰]. بر این اساس اگر و تنها اگر به ازای یک عدد صحیح مثبت $k \geq 2$

$$D_k = \det [d_{i,j}], d_{i,j} = \text{Re} \langle \hat{s}^{i+j-2} \rangle_{w,q}, \quad 0 < i, j < k + 1 \quad (۷)$$

منفی باشد حالت غیر کلاسیک است [۱۰]. برای مثال در صورتی که $D_2 < 0$ باشد،

$$\text{Re} \langle \hat{s}^2 \rangle_{w,q} < \text{Re} \langle \hat{s} \rangle_{w,q}^2, \quad (۸)$$

یک شرط کافی مرتبه اول برای غیر کلاسیکی بودن است. بنابراین به عنوان یک نتیجه فرعی می توان گفت اگر جزء حقیقی مقدار ضعیف یک مشاهده پذیر مثبت کوچک تر از صفر شود حالت حتماً غیر کلاسیک است. در مرجع [۹] با استفاده از این شرط کافی، غیر کلاسیکی حالت های گرمایی با عملگر چگالی نرمال [۱۷]:

$$\hat{\rho}_{\text{th}} = \frac{1}{1 + \bar{n}} : e^{-\frac{1}{1+\bar{n}} \hat{a}^\dagger \hat{a}} : \quad (۹)$$

بررسی شده است. در این رابطه $\bar{n} = \text{Tr } \bar{n} \hat{\rho}_{\text{th}}$ تعداد متوسط فوتون‌های گرمایی و :: علامت مرتب‌سازی نرمال است. با تعریف $\sigma^2 \equiv \bar{n} + \frac{1}{2}$ نشان داده شده است که این حالت‌ها در نقاط $|q| \geq \sqrt{\sigma^2 + 4\sigma^6}$ رفتار غیرکلاسیکی از خود نشان می‌دهند. یعنی به طور مثال برای $\bar{n} = 0.05$ در نقاط $|q| \geq 1.1$ ، شاهد رفتار غیرکلاسیکی حالت‌های گرمایی در اندازه‌گیری ضعیف تکانه خواهیم بود. اکنون شاهد‌های غیرکلاسیکی مرتبه بالاتر برای حالت‌های گرمایی را در

اندازه‌گیری ضعیف عملگر تکانه \hat{p} بررسی می‌کنیم. برای این منظور ابتدا جمله $\langle e^{ik\hat{p}} \rangle_{w,q}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\langle e^{ik\hat{p}} \rangle_{w,q} = \frac{\langle q | e^{ik\hat{p}} \hat{\rho}_{\text{th}} | q \rangle}{\langle q | e^{ik\hat{p}} | q \rangle} = \frac{\langle q + k | \hat{\rho}_{\text{th}} | q \rangle}{\langle q | e^{ik\hat{p}} | q \rangle}.$$

با قرار دادن عملگر واحد بر حسب حالت‌های همدوس $|\alpha\rangle$ و $|\beta\rangle$ در این رابطه داریم:

$$\langle e^{ik\hat{p}} \rangle_{w,q} = \frac{1}{1 + \bar{n}} \int \frac{d^2\alpha}{\pi} \frac{d^2\beta}{\pi} \langle q + k | \alpha \rangle \langle \alpha | : e^{-\frac{1}{1+\bar{n}} \hat{a}^\dagger \hat{a}} : | \beta \rangle \langle \beta | q \rangle$$

با استفاده از نمایش حالت‌های همدوس بر پایه مکان

$$\langle q | \alpha \rangle = \pi^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{q^2}{2} + \sqrt{2}\alpha q - \frac{\alpha^2}{2} - \frac{|\alpha|^2}{2}}, \quad (10)$$

به دست می‌آوریم:

$$\langle e^{ik\hat{p}} \rangle_{w,q} = e^{-ak^2 - bk} \quad (11)$$

در این رابطه کمیت‌های a و b به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$a \equiv \frac{1}{4} \frac{4\bar{n}^2 + 4\bar{n} + 2}{1 + 2\bar{n}}, \quad b \equiv \frac{q}{1 + 2\bar{n}} \quad (12)$$

در نهایت با استفاده از رابطه (۵) تابع مشخصه حاصل می‌شود:

$$\Phi_{w,q} k = e^{-ak^2} \cosh bk \quad (13)$$

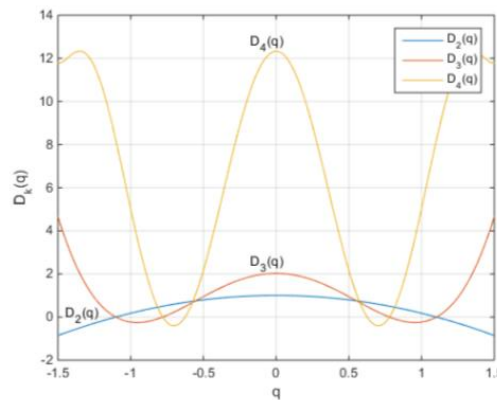
اکنون با استفاده از تابع مشخصه به دست آمده می‌توانیم تمامی شبه‌گشتاورهای $\text{Re} \langle \hat{p}^n \rangle_{w,q}$ را بیابیم:

$$\text{Re} \langle \hat{p}^n \rangle_{w,q} = -i \left. \frac{d^n}{dk^n} \Phi_{w,q} k \right|_{k=0}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \hat{p}_w &= \operatorname{Re} \hat{p}_w^3 = \operatorname{Re} \hat{p}_w^5 = 0, \\ \operatorname{Re} \hat{p}_w^2 &= 2a - b^2, \\ \operatorname{Re} \hat{p}_w^4 &= 12a^2 - 12ab^2 + b^4, \\ \operatorname{Re} \hat{p}_w^6 &= 120a^3 - 180a^2b^2 + 30ab^4 - b^6, \end{aligned}$$

در شکل ۱ با استفاده از رابطه (۷)، دترمینان‌های $D_k q$ را به ازای $k = 2, 3, 4$ برای $\bar{n} = 0.05$ رسم کرده‌ایم. در این نمودار در نقاطی که $D_k q$ منفی می‌شود، حالت‌های گرمایی به طور غیرکلاسیک رفتار می‌کنند. نتایج عددی نشان می‌دهند که $D_2 q$ در نقاط $|q| \geq 1.1$ منفی است. از طرفی در نقاط $0.78 \leq |q| \leq 1.1$ با وجود این که $D_2 q$ مثبت است ولی $D_3 q$ منفی است. همچنین در نقاط $0.63 \leq |q| \leq 0.77$ $D_3 q$ مثبت است در حالی که $D_4 q$ منفی است.



شکل ۱: $D_k q$ به ازای $k = 2, 3, 4$ به عنوان تابعی از پس‌گزینش q برای حالت‌های گرمایی با $\bar{n} = 0.05$

توجه کنیم تعریفی که برای غیرکلاسیکی حالت در اندازه‌گیری‌های ضعیف در مرجع [۱۰] ارائه شده است، بر اساس رفتار غیرکلاسیک حالت در اندازه‌گیری‌های ضعیف است که به انتخاب مشاهده‌پذیر مورد اندازه‌گیری و مشاهده‌پذیر پس‌گزینش‌گر وابسته است. بنابراین زمانی که گفته می‌شود حالت گرمایی در اندازه‌گیری‌های ضعیف غیرکلاسیک محسوب می‌شود، یعنی بسته به نوع مشاهده‌پذیر مورد اندازه‌گیری ضعیف و مشاهده‌پذیر پس‌گزینش‌گر، ویژگی‌های غیرکلاسیک این حالت می‌تواند آشکار شود. به عنوان مثال در این قسمت نشان دادیم حالت گرمایی در اندازه‌گیری ضعیف تکانه مشروط به پس‌گزینش‌گری مکان این رفتار غیرکلاسیک را نمایش می‌دهد. به عبارت دیگر در صورتی که مشاهده‌پذیر پس‌گزینش‌گر دیگری غیر از مکان انتخاب شود، ممکن است ویژگی‌های غیرکلاسیک این حالت بروز نکند. در ادامه به این سوال پاسخ داده می‌شود که چرا حالت‌های گرمایی که بنا بر تعریف گلاوبر کلاسیک محسوب می‌شوند، در اندازه‌گیری‌های ضعیف به طور غیرکلاسیکی رفتار می‌کنند.

رابطه بین شبه توزیع مشروط s $\mu_{w,q}$ با تابع ویگنر

با تعریف عملگر ویگنر به صورت انتگرالی از "کت-برا"های مکانی به صورت

$$\hat{W}(q, p) = \int du e^{-ipu} \left| q - \frac{u}{2} \right\rangle_q \left\langle q + \frac{u}{2} \right| \quad (14)$$

نماد وایل-ویگنر عملگر دلخواه \hat{A} از رابطه $\hat{A} \hat{W}(q, p) = \text{Tr} W_A(q, p)$ به دست می‌آید. در این صورت اگر $\hat{\rho}$ عملگر چگالی یک سیستم کوانتومی باشد، آن گاه چشمداشتی $\langle \hat{A} \rangle_\rho$ به شکل زیر از نمادهای وایل-ویگنر عملگرهای دخیل قابل محاسبه است [۱۸]:

$$\langle \hat{A} \rangle_\rho = \int \frac{dq dp}{2\pi} W_{\hat{\rho}}(q, p) W_{\hat{A}}(q, p) \triangleq \int dq dp W(q, p) W_{\hat{A}}(q, p) \quad (15)$$

که $W(q, p) = \frac{W_{\hat{\rho}}(q, p)}{2\pi}$ به تابع شبه احتمال ویگنر معروف است. با تعریف $\sqrt{2}\alpha = q + ip$ می‌توان نشان داد نمایش‌های حالت یک سیستم کوانتومی با تابع ویگنر $W(\alpha)$ و توزیع گلاوبر سودارشان $P(\beta)$ با تبدیل انتگرالی زیر به یکدیگر مربوطاند [۵]:

$$W(\alpha) = 2 \int d^2\beta e^{-2|\alpha-\beta|^2} P(\beta),$$

مطابق این رابطه اگر تابع ویگنر در برد خود شامل مقادیر منفی باشد، آنگاه نمایش گلاوبر-سودارشان نیز باید چنین باشد و حالت حتماً غیر کلاسیک است.

اکنون حالت کوانتومی $\hat{\rho}$ سامانه هدف در اندازه‌گیری ضعیف \hat{s} را در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم توزیع مشروط $\mu_{w,q}(s)$ را بر حسب تابع ویگنر بیابیم. برای این منظور از رابطه (۴) شروع می‌کنیم:

$$\mu_{w,q}(s) \langle q | \hat{\rho} | q \rangle = \text{Re} \left[\text{Tr} [\hat{\rho} | q \rangle \langle q | s \rangle \langle s |] \right] \quad (16)$$

اکنون با استفاده از رابطه (۱۵) به دست می‌آوریم:

$$\mu_{w,q}(s) \langle q | \hat{\rho} | q \rangle = \int dq' dp' W(q', p') \text{Re} \left[W_{|q\rangle\langle q|s\rangle\langle s|}(q', p') \right] \quad (17)$$

به عنوان مثال اندازه‌گیری ضعیف عملگر تکانه با پس‌گزینش‌گری ویژه حالت‌های مکان را در نظر می‌گیریم و با استفاده

از رابطه (۱۴) به محاسبه $\text{Re} \left[W_{|q\rangle\langle q|p\rangle\langle p|}(q', p') \right]$ می‌پردازیم:

$$W_{|q\rangle\langle q|p\rangle\langle p|} q', p' = \int du e^{-ip'u} \left\langle p \left| q' - \frac{u}{2} \right\rangle \left\langle q' + \frac{u}{2} \right| q \right\rangle \langle q | p \rangle \rightarrow$$

$$W_{|q\rangle\langle q|p\rangle\langle p|} q', p' = \frac{1}{2\pi} e^{iqp-ipq'} \int du e^{-ip'u+ip\frac{u}{2}} \delta\left(q' + \frac{u}{2} - q\right) \rightarrow$$

$$W_{|q\rangle\langle q|p\rangle\langle p|} q', p' = \frac{1}{\pi} e^{2i qp-q'p'-pq'-p'q}$$

بنابراین

$$\operatorname{Re}\left[W_{|q\rangle\langle q|s\rangle\langle s|} q', p'\right] = \frac{1}{\pi} \cos 2 qp - q'p' - pq' - p'q$$

که آشکارا نامثبت است. در نتیجه از آنجایی که $\operatorname{Re}\left[W_{|q\rangle\langle q|s\rangle\langle s|} q', p'\right]$ می تواند نامثبت باشد از رابطه (۱۷) بلافاصله نتیجه می گیریم ممکن است حالت هایی با تابع ویگنر مثبت وجود داشته باشد در حالی که دارای توزیع مشروط $\mu_{w,q}^s$ منفی پذیر باشند.

رابطه بین شبه توزیع مشروط $\mu_{w,q}^s$ با تابع توزیع گلاوبر-سودارشان

با در نظر گرفتن حالت کوانتومی داده شده در رابطه (۱)، می توانیم رابطه بین شبه توزیع مشروط $\mu_{w,q}^s$ را با توزیع گلاوبر حالت، P_α ، بیابیم:

$$\langle q | \hat{\rho} | q \rangle \mu_{w,q}^s = \int d^2\alpha P_\alpha \operatorname{Re}\left[\langle q | \delta s - \hat{s} | \alpha \rangle \langle \alpha | q \rangle\right]$$

با تعریف کرنل

$$K(q, s; \alpha) \equiv \operatorname{Re}\left[\langle q | \delta s - \hat{s} | \alpha \rangle \langle \alpha | q \rangle\right]. \quad (18)$$

خواهیم داشت:

$$\langle q | \hat{\rho} | q \rangle \mu_{w,q}^s = \int d^2\alpha P_\alpha K(q, s; \alpha) \quad (19)$$

به عنوان مثال اندازه گیری ضعیف عملگر تکانه با پس گزینش گری در ویژه حالت های مکان را در نظر می گیریم. در این حالت

$$K(q, p; \alpha) \equiv \operatorname{Re}\left[\langle \alpha | \delta p - \hat{p} | q \rangle \langle q | \alpha \rangle\right], \quad \sqrt{2}\alpha \equiv q' + ip'$$

که با استفاده از نمایش حالت های همدوس بر پایه مکان در رابطه (۱۰) و نمایش این حالت ها بر پایه تکانه

$$\langle p | \alpha \rangle = \pi^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{p^2}{2} - i\sqrt{2}p\alpha + \frac{\alpha^2}{2} - \frac{|\alpha|^2}{2}}$$

می توانیم به دست آوریم:

$$K(q, p; \alpha) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \operatorname{Re} \left(e^{-\frac{q^2+p^2}{2} + iqp - |\alpha|^2 - i\sqrt{2}p\alpha + \sqrt{2}q\alpha^* + \frac{\alpha^2}{2} - \frac{\alpha^{*2}}{2}} \right) \quad (20)$$

$$K(q, p; \alpha) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} e^{-\frac{q-q'^2}{2} - \frac{p-p'^2}{2}} \cos(q - q' - p - p'),$$

که آشکارا نامثبت است. با توجه به اینکه کرنل $K(q, p; \alpha)$ می‌تواند نامثبت باشد نتیجه می‌گیریم با وجود مثبت بودن توزیع P برای بعضی از حالت‌های کوانتومی شبه توزیع مشروط $s_{\mu_{w,q}}$ می‌تواند نامثبت باشد. به عبارت دیگر حالت‌های کوانتومی که مطابق تعریف گلاوبر کلاسیک محسوب می‌شوند می‌توانند در اندازه‌گیری‌های ضعیف به طور غیر کلاسیکی رفتار کنند.

به عنوان مثال با جایگذاری توزیع P گلاوبر حالت‌های گرمایی در رابطه (۲۰) داریم:

$$\langle q | \hat{\rho} | q \rangle \mu_{w,q}(p) = \frac{e^{-\frac{q^2+p^2}{2} + iqp}}{\pi\bar{n}\sqrt{2}} \int \frac{d^2\alpha}{\pi} e^{-\frac{|\alpha|^2}{\bar{n}}} \operatorname{Re} \left(e^{-\frac{\bar{n}+1}{\bar{n}}|\alpha|^2 - i\sqrt{2}p\alpha + \sqrt{2}q\alpha^* + \frac{\alpha^2}{2} - \frac{\alpha^{*2}}{2}} \right)$$

در نهایت با انتگرال‌گیری به دست می‌آوریم:

$$\langle q | \hat{\rho} | q \rangle \mu_{w,q}(p) = \frac{1}{\pi\sqrt{4\bar{n}^2 + 4\bar{n} + 2}} e^{-\frac{1+2\bar{n}}{4\bar{n}^2 + 4\bar{n} + 2} q^2 + p^2} \cos \left(\frac{1}{2\bar{n}^2 + 2\bar{n} + 1} qp \right)$$

که با توجه به مثبت بودن $\langle q | \hat{\rho} | q \rangle$ ، این رابطه آشکارا نشان دهنده نامثبت بودن شبه‌توزیع $\mu_{w,q}(p)$ است. به همین دلیل حالت‌های گرمایی که مطابق تعریف گلاوبر کلاسیک محسوب می‌شوند بر حسب اندازه‌گیری‌های ضعیف به طور غیر کلاسیکی رفتار می‌کنند.

نتیجه‌گیری

در این مقاله شاهد‌های غیر کلاسیک حالت‌های گرمایی در اندازه‌گیری ضعیف تکانه مشروط به پس‌گزینش‌گری ویژه حالت‌های مکان \hat{q} بررسی شد. با بررسی شواهد غیر کلاسیک برای حالت‌های گرمایی با $\bar{n} = 0.05$ نشان داده شد این حالت‌ها در نواحی پس‌گزینش‌گری $|q| \geq 1.1$ و $0.63 \leq |q| \leq 1$ به طور غیر کلاسیک رفتار می‌کنند. همچنین مشاهده شد با بررسی شواهد غیر کلاسیک مرتبه بالاتر در اندازه‌گیری‌های ضعیف گستره نواحی که در آن‌ها غیر کلاسیکی بروز می‌کند افزایش می‌یابد. همچنین نشان داده شد که شبه‌توزیع مشروط $s_{\mu_{w,q}}$ در اندازه‌گیری‌های ضعیف، با کرنل‌های تبدیل نامثبت به توابع شبه احتمال گلاوبر و ویگنر مربوط می‌شوند. وجود این کرنل‌های نامثبت باعث می‌شود برخی از حالت‌هایی که بنا بر تعریف گلاوبر کلاسیک محسوب می‌شوند در اندازه‌گیری‌های ضعیف به طور غیر کلاسیک رفتار کنند.

منابع

1. Glauber R.J., "coherent and incoherent states of the radiation field", Phys. Rev., 131 (1963) 2766-2788.
2. Sudarshan E.C.G., "Equivalence of Semiclassical and Quantum Mechanical Descriptions of Statistical Light Beams", Phys. Rev. Lett., 10(1963) 277-279.
3. Shchukin E.V., Vogel W., "Nonclassical moments and their measurement", Physical Review A, 72 (2005) 043808
4. Kuhn B., Vogel W., "Visualizing nonclassical effects in phase space", Physical Review A , 90 (2014) 033821
5. Vogel, "Quantum Optics An Introduction" (Wiley-VCH, Weinheim, 2006).
6. Johansen L.M., "Weak measurements with arbitrary probe states", Physical Review Letters, 93 (2004) 1-4.
7. Johansen L.M., Luis A., "Nonclassicality in weak measurements", Physical Review A, 70 (2004) (052115) 1-12.
8. Johansen L.M., "Nonclassical properties of coherent states", Physics Letters A, 329 (2004) 184-187.
9. Johansen L.M., "Nonclassicality of thermal radiation", Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics, 6 (2004) L21-L24.
10. Rafiepoor E., Batebi s., Bazrafkan M. R., "Quantum state nonclassicality in weak measurements in view of Bochner's criteria", Physics Letters A, 382 (2018) 2414-2419.
11. Aharonov Y., Rohrlich D., "Quantum Paradoxes- Quantum Theory for the Perplexed" (Wiley-VCH, Weinheim, 2005).
12. Shikano Y., " Measurement in Quantum Mechanics", edited by Pahlavani M. R. (InTech, Rijeka, Croatia, 2012) p. 75.

13. Kofman A. G., Ashhab S., Nori F., "Nonperturbative theory of weak pre- and post-selected measurements", *Phys. Rep.*, **520** (2012) 43-133.
14. Dressel J., Malik M., Miatto F. M., Jordan A. N., Boyd R. W., "Colloquium: Understanding quantum weak values: Basics and applications " *Rev. Mod. Phys.*, **86** (2014) 307-316.
15. Tamir B., Cohen E., "Introduction to weak Measurements and weak values", *Quanta*, 2 (2013) 7-17
16. Vaidman L., "weak value and weak measurements", *Compendium of Quantum Physics*, (2009) 840-842
17. Blasiak P., Horzela A., Penson K. A., Solomon A. L., Duchamp G. H. E., "Combinatorics and Boson normal ordering: A gentle introduction" *Am. J. Phys.* 75 (2007) 639-646
18. Bazrafkan M. R., "Schrödinger-von Neumann equation in dual tomographic representation", *J. Russ. Laser Res.*, 29 (2008) 474-489.