نظریهٔ میدان‌های اسکالر و کوانتومی در متریک شوارتشیلد – رهیافت وبر

ابوالفضل جعفری*؛
دانشگاه شهرکرد، دانشکدهٔ علوم، گروه فیزیک

دریافت: ۹۷/۱/۲۶ پذیرش: ۹۸/۱۱/۲۵

چکیده

بر پایهٔ روش وبر، نظریه میدان‌های اسکالر و میدان‌های کوانتومی در متریک شوارتشیلد و در تقریب اول از تانسور خمش ریمان را بازنویسی می‌کنیم. با شروع از معادلهٔ حرکت میدان و با استفاده از روش بتمن – کالدیرولا و کانایی، قادر خواهیم بود لاگرانژی مناسب نظریه را در مختصات محلی تخمین بزنیم. همچنین نشان خواهیم داد که با جذب اثر حضور گرانش در جرم میدان، نظریهٔ میدان‌های اسکالر مطرح شده را می‌توان به طور کامل حل و پایداری یا ناپایداری آن را بررسی نمود. با اعمال رابطهٔ کوانتش، می‌توان دریافت که رفتار میدان‌های اسکالر با پاسخ میدان‌های کوانتومی به اعمال روش وبر، متفاوت بوده و وجود یک جملهٔ نوفه در لاگرانژی میدان‌های کوانتومی ضروری است. تقریب اساسی در این مقاله، هم‌ارزی بین فضاهای شبه ریمانی و فضا زمان مینکوفسکی است.

واژگان کلیدی: نظریهٔ میدان‌های کوانتومی، مختصات ریمانی، روش وبر، روش بی– سی– کی

مقدمه

دو روش غیرنظام‌مند برای مطالعهٔ برهم‌کنش سامانه‌های فیزیکی با میدان گرانشی و پس‌زمینهٔ کیهانی در سطح مکانیک کوانتومی پیشنهاد شده است که نتایج این دو روش به یکدیگر همگرا نیستند [۱–۲]. در روش دوویت[1]، از ابتدا مکانیک کوانتومی در فضا زمان عمومی بازنویسی می‌شود و دست کم در بیشتر موارد تأثیر انحراف فضا زمان از متریک مینکوفسکی به صورت ظهور جملات اختلالی در نظریهٔ انتخاب شده بررسی می‌شود. روش وبر[2] روش دومی است که در آن تأثیر انحراف فضا زمان از متریک مینکوفسکی در معادلات دینامیک ذرات اعمال می‌شود. این روش مبتنی بر پاسخ کلاسیکی سامانه به حضور میدان‌های گرانشی است. با پذیرش جمله‌های پاسخ از طرف سیستم به میدان خارجی، معادلهٔ دینامیک تقریبی به دست می‌آید. در این رهیافت (رهیافت وبر) به دنبال آغازی برای معادلهٔ تقریب شده هستیم که بتوان مسألهٔ فیزیکی از نو بنا نهاد. تا آن‌جا که به مکانیک کوانتومی مربوط می‌شود، در هر دو

*نویسندهٔ مسئول: jabolfazl@sci.sku.ac.ir

[1] DeWitt
[2] Weber

[DOI: 10.52547/jmrph.4.1.9]

روش، بررسی تحول عوامل گرانش منظور مسأله نیست و از تحول آن صرف‌نظر می‌شود. از جهت نقش هندسی گرانش، نتیجهٔ اعمال انحراف هندسه فضا زمان در حد غیرنسبیتی، رسیدن به یک مسألهٔ اختلالی است که می‌بایست از طریق نظریهٔ اختلال وابسته یا مستقل از زمان حل شوند [۱–۳]. در حال حاضر هر دو روش پیگیری می‌شود و در خصوص بازتعریف مسایل متفاوت و گسترده از فیزیک به این حوزه فعالیت‌هایی صورت می‌گیرد. اتم هیدروژن یک مورد مشترک و شناخته شده از معادله اسپینوری دیراک است که در همه سطوح و با هردو روش مورد مطالعه قرار گرفته است [۱–۵].

بر اساس نظریهٔ نسبیت عام، فضا زمان مینکوفسکی یک فضا زمان حدی بر فضا زمان عمومی است که از منظر هندسی فضای مماس برای فضای پایه است. شاید اساسی‌ترین نکته در روش‌های اختلالی که به هندسهٔ فضا زمان مربوط می‌شود، هم‌ارز بودن فضا زمان مماس با فضا زمان مینکوفسکی بر فضا زمان پایه است. نکتهٔ مشترک هر دو روش در مسیر مطالعهٔ برهم‌کنش ماده با پس زمینهٔ کیهانی، تقریب فضای مماس بر خمینهٔ شبه‌ریمانی اصلی که از آن با نام فضا زمان پایه نام می‌بریم است که در اصل از حل معادلهٔ گرانش نسبیت عام حاصل می‌شود و شامل پارامتر بسط در متریک و ضرایب کریستوفل[۳] است. پارامتر بسط در متریک و ضرایب کریستوفل، نقش تعیین کننده‌ای در این دسته از مسایل اختلالی دارند. در همهٔ موارد پارامتر بسط مؤلفه‌های تانسور خمش ریمان هستند. می‌دانیم که نسبیت عام تضمین می‌کند که همواره نسبیت خاص در همسایگی یک رویداد قابل دسترسی است. فضای مماس بر فضا زمان پایه به دو حالت متفاوت ایستا یا دینامیک قابل تفکیک است و هر مورد، مسیر و ابزار متفاوتی را برای بررسی می‌طلبد. مستقل از زمان یا وابسته به زمان بودن یک فضای مماس را به مستقل از زمان یا وابسته به زمان بودن تانسور خمش ریمان (پارامتر بسط فضای مماس در آن نقطه از فضا زمان پایه) مربوط می‌کنیم. این کاملاً منطقی است که بپذیریم فضای مماسی که بر یک نقطه از فضا زمان پایه بنا می‌شود، در حقیقت دارای پارامتر تعیین کننده‌ای است که ماهیت فضای مماس را نیز مشخص می‌کند. این پارامتر مقدار مؤلفه‌های تانسور خمش ریمان فضای پایه در محل رویداد است و ممکن است نقطه به نقطه از فضا زمان پایه تغییر کند و این دلیلی است برای این مطلب که مطالب این مقاله به شدت به نقطهٔ مورد بحث از فضا زمان وابسته باشند. بازتعریف فیزیک به فضا زمان شوارتشیلد ایستا، نمونه‌ای از مسائل اختلالی است که در یک رهیافت غیردینامیکی روی می‌دهند و در این مثال خاص، مؤلفه‌های تانسور خمش ریمان مستقل از زمان هستند. در این مقاله به بررسی دینامیک میدان‌های اسکالر و کوانتومی در فضای مماس بنا شده بر جهان شوارتشیلد ایستا خواهیم پرداخت. فضا زمان بنا شده بر پایهٔ فضا زمان اصلی در حضور امواج گرانشی ضعیف خطی[۴] که فقط تابع زمان هستند و در یک جهت مشخص مانند $\hat{k}$ منتشر می‌شوند مثالی برای فضا زمان مماس دینامیک با پارامتر خمش ریمان وابسته به زمان است. این امواج در بعضی از پیمانه‌ها با قطبیدگی خاصی

[3] Christoffel Connection
[4] LGW

[DOI: 10.52547/jmrph.4.1.9]

معرفی و ارائه می‌شوند و شالودهٔ نظریهٔ آن، جفت‌شدگی کوچک بین بعضی مختصات فضایی در ماتریس متریک است [۱–٦].

بر اساس اصول نسبیت عام، در هر نقطه از فضا زمان پایه یک چارچوب لخت محلی می‌توان بنا نمود و توسط آن فضای مماس را مصلح به مختصات کرد [٥–٦]. عملیاتی کردن این قضیه در نسبیت عام، منحصر کردن فیزیک مورد مطالعه به آزمایشگاه‌های در حال سقوط آزاد در حضور میدان گرانش ناشی از چشمه معادلهٔ انیشتین است. در این حالت، تانسور متریک و ضرایب کریستوفل در فضای مماس – متکی بر نقطه انتخابی از فضا زمان پایه – قابل بسط هستند. اگر پارامتر بسط در آن نقطه از فضا زمان پایه، مولفه‌های تانسور ریمان باشند آنگاه مختصات پیشنهاد شده در فضای مماس را مختصات ریمانی می‌نامند. ساختار تعیین مختصات نرمال ریمان دشوار است و بر پایهٔ جهانخط و ژئودزیک است [٥–١١].

در دستگاه مختصات ریمانی و بر حسب پارامتر خمش ریمان، بسط متریک فضا زمان مماس و دترمینان آن به صورت زیر داده می‌شوند [٤–٥].

$$g_{ij}=\delta_{ij}-\frac{1}{3}R_{ikjm}x^k x^m,\quad g_{0i}=-\frac{2}{3}R_{0kim}x^k x^m,$$
$$g_{00}=-1-R_{0k0m}x^k x^m,\quad g=-1+\frac{1}{3}(R_{lm}-2R_{0l0m})x^l x^m, \tag{۱}$$

همچنین ضرایب کریستوفل بر اساس معادله (۱) چنین خواهند بود:

$$\begin{aligned}
&\Gamma^0_{00}=\circ,\\
&\Gamma^0_{0i}=R_{0i0j}x^j,\\
&\Gamma^0_{ij}=\frac{1}{3}(R_{0ijm}+R_{ojim})x^m,\\
&\Gamma^i_{00}=R_0{}^i{}_{0j}x^j,\\
&\Gamma^i_{jk}=\frac{1}{3}(R_j{}^i{}_{km}+R_k{}^i{}_{jm})x^m,
\end{aligned} \tag{۲}$$

در روابط بالا $\eta^{\mu\nu}=diag(-1,+1,+1,+1)$ متریک مینکوفسکی است، $R_{\mu\alpha\nu\beta}$ ها مؤلفه‌های تانسور خمش ریمان هستند که به عنوان پارامتر بسط، در حقیقت به صورت تابعی از نقطهٔ رویداد P – نقطه‌ای در فضا زمان اصلی – ($R_{\mu\alpha\nu\beta}(P)$) – هستند. برای سهولت و اختصار، نقطه فضا زمان پایه را در مؤلفه‌های تانسور ریمان ننوشته‌ایم، چرا که جز اندازهٔ این مؤلفه‌ها در آن نقطه چیز دیگری را تعیین نمی‌کنند. مختصات ظاهر شده x^μ مختصات محلی یا مختصات ریمانی بنا شده در فضا زمان مماس بر پایهٔ نقطهٔ P خواهند بود. هدف اصلی معرفی دستگاه مختصات نرمال ریمان، دستگاه

مختصاتی است که برای ارتباط بین دو نقطهٔ همسایه در یک خمینه مورد استفاده قرار می‌گیرد. بنابراین، مؤلفه‌های ظرایب کریستوفل در مبداء دستگاه موردنظر صفر هستند. مؤلفه‌های تانسور ریمان ارائه شده در روابط (۱) و (۲)، برای فضا زمان اصلی در جهان شوارتشیلد ایستا با متریک اولیه

$$ds^2 = -c^2\left(1-\frac{2GM}{c^2 r}\right)dt^2 + \left(1-\frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right), \qquad (۳)$$

قابل تعیین شدن هستند. لازم به ذکر است که هرچند بالا و پایین شدن اندیس‌های لورنتسی در فضای پایه با متریک (۳) انجام می‌شود، اما در خصوص این روند برای فضای مماس، هرگونه بالا یا پایین کردن اندیس‌ها در فضای مماس با متریک رابطهٔ (۱) خواهد بود.

معادلهٔ حرکت میدان اسکالر کوانتومی و روش وبر

هرگاه در بررسی یک سامانهٔ فیزیکی در حوالی یک جسم سنگین متقارن مانند سیاه‌چاله، منطقه‌ای یافت شود که فقط مرتبهٔ اول تانسور خمش ریمان ارزشمند باشد، آن‌گاه می‌توان از روش وبر معادله حرکت سامانه را در آن ناحیه از فضا تقریب زد. باید گفت که این ناحیه با شرایط بیان شده دسترس‌پذیر است[۵]. در مورد متریک شوارتشیلد ایستا و بر اساس فاصلهٔ ناحیهٔ مذکور از چشمهٔ گرانشی- $\mathfrak{R}$ ، مؤلفه‌های تانسور خمش ریمان ذکر شده دسترس‌پذیر هستند و به مقادیر ثابت زیر تحویل خواهند شد.

$$R_{0101} = -\frac{2GM}{c^2\mathfrak{R}^3},\ R_{0202} = R_{0303} = \frac{GM}{c^2\mathfrak{R}^3}, \qquad (۵)$$

به این ترتیب، فضا زمانی که توسط یک منبع گرانشی تحت تأثیر قرار گرفته است، اثرات ناشی از گرانش را در متریک و با شاخص‌هایی نظیر ثابت خمش و غیره آشکار می‌سازد. اعتبار روش وبر به ناظر هموردا گسترش نمی‌یابد و ویژگی‌های نهفته در متریک با تحمیل نیرویی جدید که از نسبیت عام می‌آید، در معادلهٔ حرکت نمود پیدا می‌کند. یعنی جمله‌های برهم‌کنشی جدید تا حد اولین توان از تانسور خمش ریمان یا ضرایب کریستوفل در معادلهٔ حرکت ظاهر می‌شوند. معادلهٔ حرکت تقریب شده میدان‌های اسکالر کوانتومی بر اساس روش وبر به صورت زیر خواهد بود [٦]

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}\partial_\nu)\phi + m^2\phi + \varsigma R\phi = 0, \qquad (٦)$$

[۵] دسترس‌پذیری شرایط بیان شده در واقع می‌تواند به آزمایشگاه در حال سقوط آزاد در میدان گرانشی ناشی از جرم مشخص در متریک و با رعایت فاصله مناسب باشد. به طور مثال و با توجه به تاثیر ناچیز خورشید، ناظر زمینی در فاصله‌ی داده شده از خورشید یک مورد مناسب برای این مطلب است. فاصله از منشاء گرانش در متریک، اعتبار تقریب اول ضرایب تانسور خمش ریمان برای بنا کردن فضای مماس را متزلزل می‌کند.

که در آن $\varsigma = \dfrac{d-2}{4(d-1)}$ ضریب جفتش گرانشی است و مقدار آن می‌بایست بازاء $d=3$ (بعد فضا زمان) منظور شود و R اسکالر ریچی است. تانسور و اسکالر ریچی بازاء حل خلاء معادله انیشتن و همچنین در تقریب اول از مختصات ریمان صفر هستند و از محاسبات نظریه میدان در فضای مماس خارج می‌شوند. همچنین می‌دانیم که مشتق دترمینان متریک در رابطهٔ $\partial_\mu Ln(\sqrt{-g}) = \Gamma^\nu_{\mu\nu}$ صدق می‌کند. بنابراین، معادلهٔ حرکت میدان اسکالر کوانتومی در حوالی منبع گرانشی ایستا و در فضا زمان مماس به صورت زیر خواهد بود:

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + \Gamma^\nu_{\mu\nu} \partial^\mu \phi + m^2 \phi = 0, \tag{۷}$$

در تقریب اول و برای شرایط بررسی اختلالی، جمله برهم‌کنشی میانی در رابطهٔ بالا تنها اثر میدان گرانشی در معادلهٔ حرکت میدان اسکالر کوانتومی است. در روش وبر برای بررسی بیشتر، بازاء دینامیک (۷) لاگرانژی مناسبی را جستجو خواهیم کرد. با توجه به رابطهٔ (۲) تنها عبارت‌های غیر صفر جملهٔ میانی معادلهٔ (۷) بازاء $\Gamma^0_{0i} = R_{0i0m} x^m$ و $\Gamma^i_{ij} = \dfrac{1}{3} R_j{}^i{}_{im} x^m$ اتفاق خواهد افتاد. بنابراین معادلهٔ تقریب شده به معادلهٔ زیر تحویل خواهد شد:

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + \left(\frac{1}{3} R_j{}^i{}_{ik} + R_{0j0k}\right) x^k \partial^j \phi + m^2 \phi = 0, \tag{۸}$$

اکنون با استناد به تقارن کروی منبع گرانشی، می‌توان دریافت که در رابطهٔ (۸)، x^k می‌بایست برابر x^j باشد. به این ترتیب معادلهٔ دینامیک میدان اسکالر کوانتومی در میدان گرانشی جسم متقارن سنگین برای ناظر ناهموردا، برابر رابطهٔ (۸) است. با بازتعریف $\dfrac{1}{3}\sum_i R_{jiik} + R_{0j0k} = 2u_{jk}$، با ویژگی متقارن بودن نسبت به جابه‌جایی اندیس‌ها $u_{jk} = u_{kj}$، رابطهٔ (۸) به صورت زیر تبدیل خواهد شد:

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + 2u_{kj}\, x^k \partial^j \phi + m^2 \phi = 0, \tag{۹}$$

اعتبار معادلهٔ (۹) البته محدود به زمانی است که تغییرات میدان و مختصات محلی نتوانند کوچکی ضریب تانسور خمش ریمان که وابسته به مختصات آزمایشگاه است را جبران نمایند. در روش وبر، به دنبال چگالی لاگرانژی خواهیم بود که معادلهٔ حرکت (۹) را تولید نماید. برای دسترسی به لاگرانژی معادلهٔ (۹) به مدل بتمن – کالدیرولا – کانایی[6] رجوع می‌کنیم. در مدل BCK، لاگرانژی معادله حرکت نوسانگر میرا شونده:

[6] Bateman - Caldirola - Kanai

[DOI: 10.52547/jmrph.4.1.9]

$$m\ddot{q}+b\dot{q}+kq=0, \tag{۱۰}$$

با رابطه

$$L=\frac{1}{2}e^{\frac{b}{m}t}(m\dot{q}^2-kq^2), \tag{۱۱}$$

داده می‌شود [۱۲-۱٤]. با تعریف $L=e^{\beta t}L_0$ که در آن $\beta=\frac{b}{m}$ و $L_0=\frac{1}{2}m\dot{q}^2-\frac{1}{2}kq^2$ لاگرانژی سیستم نوسانگر بدون اتلاف است، معادلهٔ (۱۱) را می‌توان بهتر نوشت. از آن‌جایی که لاگرانژی (۱۱) تابع صریح زمان است، می‌توان انتظار داشت که انرژی سیستم ثابت حرکت نخواهد بود. این برداشت در آینده در خصوص میدان‌های اسکالر قابل استناد نخواهد بود. اکنون، با مقایسهٔ معادلهٔ حرکت تقریب شده و نوسانگر میرا شونده و با استناد به لاگرانژی BCK، می‌توان در روش وبر لاگرانژی نظریهٔ میدان‌های اسکالر کوانتومی در متریک شوارتشیلد را پیشنهاد داد:

$$L(\phi,\partial_\mu\phi,x^\mu)=e^{x^j u_{jk}x^k}L_0(\phi,\partial_\mu\phi), \tag{۱۲}$$

که در آن

$$L_0(\phi,\partial_\mu\phi)=\frac{1}{2}(\partial^\mu\phi\,\partial_\mu\phi-m^2\phi^2), \tag{۱۳}$$

لاگرانژی نظریهٔ آزاد در فضا زمان مینکوفسکی است. بنابراین لاگرانژی اولیه چنین بوده است:

$$L(\phi,\partial_\mu\phi,x^\mu)=\frac{1}{2}e^{x.u.x}(\partial^\mu\phi\,\partial_\mu\phi-m^2\phi^2), \tag{۱٤}$$

به طوری که داشته باشیم: $\partial_\mu(x.u.x)=2u_{jk}x^k\delta^j_\mu,$. اما با توجه به آزادی در انتخاب لاگرانژی یک سیستم، می‌توان در لاگرانژی (۱٤) دستکاری کرد. از آن جایی که تنها، مؤلفه‌های مکانی u_{jk} ها غیر صفر هستند بنابراین در تمام روابط، جملهٔ زمانی $u_{\mu k}$ (بازاء μ برابر صفر، u_{0k}) صفر خواهد بود. با توجه به رابطهٔ $e^{\frac{1}{2}x.u.x}\partial_\mu\phi=\partial_\mu(e^{\frac{1}{2}x.u.x}\phi)-u_{\mu k}x^k\phi,$ می‌توان لاگرانژی (۱٤) را چنین نوشت:

$$L(\phi,\partial_\mu\phi,x^\mu)=\frac{1}{2}(\partial^\mu(e^{\frac{1}{2}x.u.x}\phi)-u^{\mu j}x_j e^{\frac{1}{2}x.u.x}\phi)(\partial_\mu(e^{\frac{1}{2}x.u.x}\phi)-u_{\mu k}x^k e^{\frac{1}{2}x.u.x}\phi)-\frac{1}{2}m^2e^{x.u.x}\phi^2), \tag{۱۵}$$

اکنون با فرض کوچک بودن جملات با توان‌های بالاتر u_{jk} $((u_{\mu k})^2\approx 0)$، معادلهٔ (۱۵) برابر است با

$$L(\phi,\partial_\mu\phi,x^\mu)=\frac{1}{2}(\partial^\mu(e^{\frac{1}{2}x.u.x}\phi)(\partial_\mu(e^{\frac{1}{2}x.u.x}\phi)-u_{\mu k}x^k e^{\frac{1}{2}x.u.x}\phi\partial^\mu\phi-\frac{1}{2}m^2(e^{\frac{1}{2}x.u.x}\phi)^2, \quad (۱۶)$$

که قابل تبدیل به معادلهٔ زیر است:

$$L(\phi,\partial_\mu\phi,x^\mu)=\frac{1}{2}(\partial^\mu(e^{\frac{1}{2}x.u.x}\phi)(\partial_\mu(e^{\frac{1}{2}x.u.x}\phi)-\frac{1}{2}u_{\mu k}x^k e^{\frac{1}{2}x.u.x}\partial^\mu\phi^2-\frac{1}{2}m^2(e^{\frac{1}{2}x.u.x}\phi)^2, \quad (۱۷)$$

ولی با فرض اعتبار اولین توان در جمله برهم‌کنش، برابری زیر را داریم: $u_{\mu k}x^k e^{\frac{1}{2}x.u.x}\partial^\mu\phi^2=u_{\mu k}x^k\partial^\mu(e^{\frac{1}{2}x.u.x}\phi)^2$، که با تعریف متغیر جدید: $e^{\frac{1}{2}x.u.x}\phi=\phi'$، رابطه (۱۷) خواهد شد:

$$L(\phi,\partial_\mu\phi,x^\mu)=\frac{1}{2}\partial^\mu\phi'\partial_\mu\phi'-\frac{1}{2}u_{\mu k}x^k\partial^\mu\phi'^2-\frac{1}{2}m^2\phi'^2, \quad (۱۸)$$

اکنون با توجه به امکان تقارن در لاگرانژی (آزادی در افزودن جملهٔ مشتق کامل)، داریم:

$$L(\phi,\partial_\mu\phi,x^\mu)=\frac{1}{2}\partial^\mu\phi'\partial_\mu\phi'-\frac{1}{2}\partial^\mu(u_{\mu k}x^k\phi'^2)+\frac{1}{2}u^\mu_\mu\phi'^2-\frac{1}{2}m^2\phi'^2, \quad (۱۹)$$

می‌توان جملهٔ $\partial^\mu(u_{\mu k}x^k\phi'^2)$، به عنوان مشتق کامل را حذف کرد. همچنین جمله $\frac{1}{2}u^\mu_\mu\phi'^2-\frac{1}{2}m^2\phi'^2$ را با تعریف جدید از جرم (جرم یو m_u) در جمله انرژی سکون میدان جذب می‌کنیم:

$$L(\phi,\partial_\mu\phi,x^\mu)=\frac{1}{2}\partial^\mu\phi'\partial_\mu\phi'-\frac{1}{2}(m^2-trc(u))\phi'^2, \quad (۲۰)$$

به وضوح، لاگرانژی (۲۰) توصیف کننده نظریه میدان‌های اسکالر آزاد، با کمی تفاوت در جرم میدان است. بنابراین تمام نتایج این نظریه قابل تعمیم به مسألهٔ میدان‌های اسکالر برهم‌کنش کننده است. انرژی میدان اسکالر نکتهٔ مهمی خواهد بود که بر اساس رابطهٔ (۲۰) برابر است با $E^2=k^2+(m^2-trc(u))$. همچنین با جایگزین کردن جرم میدان اولیهٔ m با جرم جدید m_u، می‌توان جواب‌ها، تابع گرین و انتشارگر میدان بدون برهم‌کنش را برای میدان جدید به کار گرفت[۷].

[۷] به نظر می‌رسد با تغییر تکانهٔ غیرمعمول از (۱۳) به (۲۰) –این تغییر متغیر شرط هرمیتی بودن مشاهده‌پذیر فیزیکی را نقض می‌کند– به صورت $p^\mu=k^\mu-ix_\nu u^{\nu\mu}$ روابط جابه‌جاگری تکانه‌های جدید p بر پایهٔ روابط تکانه‌های k به صورت استاندارد باقی می‌ماند. به این وسیله و با توجه

[DOI: 10.52547/jmph.4.1.9]

با محاسبهٔ تکانهٔ میدان جدید از میدان اولیه، $\Pi = \frac{\partial L_0}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi} = e^{-\frac{1}{2}x.u.x}\frac{\partial}{\partial t}(e^{\frac{1}{2}x.u.x}\phi) = e^{-\frac{1}{2}x.u.x}\Pi'$، می‌توان نشان داد که نتیجهٔ به دست آمده برای میدان‌های کوانتومی دارای اعتبار نیست. برای این منظور توجه می‌کنیم که بازاء دو نقطه از فضا زمان x و x'، میدان بدون برهم‌کنش با شرط $[\phi(x), \Pi(x')] = i\delta(x-x')$, رابطهٔ کوانتش را اغنا می‌نماید. اما، رابطهٔ کوانتش میدان نظریهٔ برهم‌کنشی به دست آمده با جایگذاری مستقیم کمیت‌ها چنین خواهد بود:

$$[\phi'(x), \Pi'(x')] = ie^{x.u.x}\delta(x-x'), \tag{۲۱}$$

رابطهٔ (۲۱) نشان می‌دهد که در صورت اقدام برای کوانتومی کردن میدان جدید، کوانتش میدان جدید دارای روابط استاندارد نخواهد بود. البته از منظر هندسی، به نظر می‌آید رابطهٔ (۲۱) در توافق با تفسیر دیراک در خصوص تأثیر میدان‌های پیمانه‌ای در هندسه فضا است. این موضوع را با تغییر در تفسیر بردارهای پایه فضا به صورت زیر پیشنهاد می‌کنیم: $<x|_{New} = <x|e^{x\Gamma(x)}$, و $|x>_{New} = e^{\Gamma(x)x}|x>$, به این ترتیب رابطهٔ تعامد به صورت زیر اصلاح خواهد شد:

$$<x|x'>_{\text{in the presence of gravitational effects}} = e^{x\Gamma(x)+\Gamma(x')x'}\delta(x-x') = e^{2x\Gamma(x)}\delta(x-x'), \tag{۲۲}$$

دیده می‌شود که با فرض، $\Gamma^l_{kl}(x) \equiv \frac{1}{2}u_{kl}x^l$ رابطهٔ (۲۱) به دست خواهد آمد. به هر حال تمام نتایج نظریهٔ میدان‌های اسکالر آزاد، مانند حل معادلهٔ حرکت و تابع گرین، تنها با تغییر در تعریف جرم میدان، قابل استناد هستند و این موضوع بر اساس رابطهٔ (۲۰) قابل تفسیر است. بر خلاف نظریهٔ بتمن – کالدیرولا – کانایی، که انرژی سامانه میرا شونده ناپایسته است، انرژی میدان‌های برهم‌کنشی معادلهٔ (۱٤) پایسته است.

به این‌که $u^{00} = u^{0i} = 0$ و همچنین با صرفنظر از مراتب بالاتر u، می‌توان انرژی میدان را محاسبه کرد:

$$\phi'(x) = e^{\frac{1}{2}x.u.x}\phi(x) = \int d\!\!{}^-{}^3k \frac{e^{\frac{1}{2}x.u.x}}{2E_k}(a_k e^{-iE_k t} + a^+_{-k}e^{iE_k t})e^{ik.x} \to \int d\!\!{}^-{}^3p \frac{1}{2E_p}(a_p e^{-iE_p t} + a^+_{-p}e^{iE_p t})e^{ip.x}$$

این رابطه نشان می‌دهد که دست‌آوردهای میدان اسکالر جدید با تبدیل جرم همان نتایج میدان اسکالر اولیه است.

$E^2 = p^{i*}p_i + m^2 = (k^i + iu^{ij}x_j)(k_i - iu_{il}x^l) + m^2 = k^2 + m^2 - trc(u),$ به‌طوریکه جرم جدید m_u در آن به وضوح دیده می‌شود. همچنین می‌توان رهیافت فوق را در رابطه جواب معادله حرکت میدان نیز دنبال کرد:

$$\phi'(x) = e^{\frac{1}{2}x.u.x}\phi(x) = \int d\!\!{}^-{}^3k \frac{e^{\frac{1}{2}x.u.x}}{2E_k}(a_k e^{-iE_k t} + a^+_{-k}e^{iE_k t})e^{ik.x} \to \int d\!\!{}^-{}^3p \frac{1}{2E_p}(a_p e^{-iE_p t} + a^+_{-p}e^{iE_p t})e^{ip.x}$$

این رابطه نشان می‌دهد که دست‌آوردهای میدان اسکالر جدید با تبدیل جرم همان نتایج میدان اسکالر اولیه است.

در صورت اعمال این مراحل برای میدان کوانتومی و برای خلاص شدن از رابطهٔ غیررسمی (۲۱) می‌توانیم به یک جملهٔ پس‌زمینه (نوفه) متوصل شویم که معنی آن برهم‌کنش میدان کوانتومی با میدان زمینه و عدم پایستگی انرژی میدان است.

$$L(\phi,\partial_\mu\phi,x^\mu)=\frac{1}{2}\partial^\mu\phi'\partial_\mu\phi'-\frac{1}{2}(m^2-trc(u))\phi'^2+gA^\mu\partial_\mu\phi', \qquad (۲۳)$$

که در آن g ضریب جفتش میدان کوانتومی جدید ϕ' با میدان نوفه A است. این تصحیح در معادلهٔ (۲۳) از عدم تطابق رسمی معادله (۲۱) با رابطهٔ استاندارد است. اصلاح شده معادله (۲۰) با بازنشانی برهم‌کنش میدان کوانتومی با میدان نوفه، نشان می‌دهد که افت و خیز ناشی از حضور جملهٔ گرانشی در انرژی میدان کوانتومی با بازتعریف φ' توسط جرم سکون جذب نمی‌شود و میدان کوانتومی برهم‌کنش کننده مانند میدان بدون برهم‌کنش نخواهد بود.

نتیجه‌گیری

در این رهیافت ابتدا دینامیک میدان‌های اسکالر در فضای مماس بر جهان شوارتشیلد ایستا را به عنوان یک مسألهٔ غیرنسبیتی قابل بررسی در آزمایشگاه کوچک و لخت مطرح کردیم آنگاه به روش وبر، هامیلتونی مسألهٔ را در دستگاه مختصات ریمانی و بر پایه مؤلفه‌های تانسور ریمان بازنویسی کردیم. در نوشتن هامیلتونی مسأله، نشان دادیم که با برآوردی از مرتبهٔ جملات شامل جملهٔ نیروی برهم‌کنشی، محدودهٔ سرعت‌های غیرنسبیتی قابل تعیین است به طوری که ناحیهٔ معتبر برای بررسی مسأله شناسایی می‌شود. توانستیم با جذب جملهٔ برهم‌کنشی در جرم میدان بازتعریف، نشان دهیم که نظریهٔ میدان‌های اسکالر برهم‌کنشی با زمینهٔ ضعیف کیهانی علی‌رغم تشابه ظاهری قابل تحویل به نظریه بدون برهم‌کنش با جرم جدید در فضا زمان مینکوفسکی است. همچنین نتایج به دست آمده از اقدام به کوانتش میدان بازتعریف، مؤید این نکته بوده است که نمونهٔ کوانتومی مسأله از روند یکسان با مورد غیرکوانتومی برخوردار نیست. این مقاله برای یافتن و مقایسهٔ نظریهٔ میدان‌های برهم‌کنشی با یک میدان گرانشی ضعیف در رهیافت وبر است و اعتبار نتایج آن به جهت تقریبی بودن روش وبر، مستلزم مطالعهٔ همسو در رهیافت دیراک می‌باشد. پیشنهاد می‌شود که برای راستی‌آزمایی این مقاله، مراحل طی شده به روش دیراک مرور شده و نتایج با یکدیگر مقایسه شود.

منابع

1. A.D. Speliotopoulos, Phys. Rev. **D51**, 1701-1709,1995.

2. A. Saha, S. Gangopadhyay, S. Saha, Phys. Rev. **D83**, 025004,2011.

3. L. Parker, Phys. Rev. **D22**, 1922-1934,1980 and Phys. Rev. Lett. **44**, 1559-1562, 1980.

[DOI: 10.52547/jmph.4.1.9]

4. F. Pinto, Phys. Rev. Lett. **70**, 3839-3843, 1993.

5. U. Muller, C. Schubert and Anton E. M. Vandevan, General Relativity and Gravitation, **31**, 1999.

6. C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler "Gravitation", Freeman Publishing Company, San Francisco, 1970, J. Weber, "General Relativity And Gravitational waves", Dover Publications, Inc. Mineola, New York, 1961, Ray, D'Inverno, "Introducing Einstein's Relativity", Oxford University Press Inc. New York, 1992 and H. C. Ohanian, "Gravitation And Spacetime", Inc. W. W. Norton & Company, 1976.

7. A. Hatzinikitas, " A Note on Riemann Normal Coordinates", hep-th/0001078.

8. A. I. Nesterov, " Riemann normal coordinates, Fermi reference system and the geodesic deviation ", Class. Quant. Grav. **16** (1999), gr-qc/0010096.

9. P. Delva, M. C. Angonin, "Extended Fermi Coordinates", Gen. Rel. Grav. **44,** (2012), 1-19**,** gr-qc/09014465.

10. M. S. Underwood, K. P. Marzlin, "Fermi-Frenet Coordinates for Space-like Curves", Int. J. Mod. Phys. **A 25** (2010), gr-qc/07063224.

11. D. Klein, P. Collas, " Exact Fermi Coordinates For a Class of Spacetimes ", J. Math. Phys. **51** (2010), 022501, math-ph/09122779.

12. K. P. Marzlin, " On the physical meaning of Fermi coordinates ", Gen. Rel. Grav. **26** (1994), gr-qc/9402010 and " Fermi coordinates for weak gravitational fields ", Phys. Rev. **D50** (1994), gr-qc/9403044.

13. H. Bateman, Phys, Rev. **38** (1931), 815

14. P. Caldirola, Nouvo Cimento, **18** (1941) 393

15. E. Kanai, Prog. Theoret. Phys. **3** (1948), 440

[DOI: 10.52547/jmrph.4.1.9]