کوانتش مستقیم سیستم‌های کلاسیک با استفاده از معادلهٔ حرکت و رفع چندگانگی در فرمالیزم لاگرانژی

شهرام خسروی*؛
دانشگاه خوارزمی، دانشکدهٔ فیزیک، گروه نجوم و انرژی‌های بالا

دریافت ۹۴/۱۱/۱ پذیرش ۹۵/۱/۲۰

چکیده

بررسی مسئلهٔ معکوس حساب وردش منجر به یافتن لاگرانژی‌های متعدد برای یک سیستم کلاسیک می‌شود که همه یک معادله حرکت مشابه می‌دهند. از سوی دیگر با کوانتیده کردن این لاگرانژی‌ها روابط کوانتومی به دست می‌آیند که با نتایج تجربی توافق ندارند. بنابراین باید معیاری یافت که لاگرانژی صحیح را انتخاب کند. ما در اینجا بر مبنای روابط جابه‌جایی کوانتومی و با کوانتش مستقیم معادلات حرکت نشان می‌دهیم لاگرانژی که از روابط جابه‌جایی کانونیک و در نتیجهٔ کوانتش در توافق با تجربه به دست می‌آید، همان لاگرانژی متعارف است. این کار را به دو روش متفاوت یکی بر اساس رهیافت جبری به مسئلهٔ معکوس و دیگری براساس روش زمان گسسته در کوانتش سیستم‌های کلاسیک انجام می‌دهیم.

واژه‌گان کلیدی: مسئلهٔ معکوس، حساب وردش، کوانتش کانونیک

مقدمه

بررسی سیستم‌های مکانیک کلاسیک در حالت کلی از طریق حل معادلهٔ دیفرانسیل مربوط به قانون دوم نیوتون انجام می‌شود. با این حال رهیافت‌های دیگری نیز وجود دارند که گرچه معادل با این رهیافت هستند اما روش‌های ریاضی متفاوتی را برای حل مسئله به کار می‌گیرند [۱]. یکی از این رهیافت‌ها صورتبندی لاگرانژی مبتنی بر تابع لاگرانژی L است. لاگرانژی تابعی از مختصهٔ تعمیم یافتهٔ q و سرعت $\dot{q}$ متناظر با آن است و با استفاده از آن کنش به شکل زیر تعریف می‌شود

$$S = \int L dt \qquad (۱)$$

که این انتگرال روی مسیر حرکت محاسبه می‌شود. در این زمینه به عنوان اصل پذیرفته می‌شود که مقدار کنش بر روی مسیر واقعی حرکت نسبت به سایر مسیرها کمینه است. پس مسئلهٔ یافتن مسیر حرکت یک مجموعه از ذرات به منزلهٔ حل معادله‌ای است که از صفر قرار دادن وردش کنش به دست می‌آید. این رهیافت منجر به معادلهٔ حرکت زیر می‌شود

* نویسندهٔ مسئول: Khosravi_Sh@khu.ac.ir

[Downloaded from jmrph.khu.ac.ir on 2024-11-25]

[DOI: 10.52547/jmrph.2.1.13]

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial L}{\partial q}=0 \qquad (۲)$$

رابطهٔ فوق معادلهٔ اویلر- لاگرانژ نامیده می‌شود و در آن L همان تابع لاگرانژیست. شکل استاندارد تابع لاگرانژی در مکانیک کلاسیک تفاضل بین انرژی جنبشی و پتانسیل سیستم است،

$$L=T-V \qquad (۳)$$

می‌توان نشان داد که توابعی به شکل زیر نیز در همان معادلهٔ اویلر- لاگرانژ مربوط به L صدق می‌کنند

$$L=T-V+\frac{df}{dt} \qquad (۴)$$

که در آن f تابع دلخواهی از مختصات است. یادآور می‌شویم که اختلاف دو لاگرانژی (۳) و (۴) یک دیفرانسیل کامل است و از دیدگاه معادلات حرکت این دو تابع لاگرانژی هم‌ارز محسوب می‌شوند به این معنا که منجر به مجموعهٔ معادلات حرکت یکسان می‌شوند.

اما کارهای اولیه روی این موضوع توسط هلمهولتز نشان داد برای هر مجموعه معادلات حرکت مانند

$$\ddot{x}^i=f^i, \qquad i=1,2,\dots,n \qquad (۵)$$

می‌توان لاگرانژی‌های متعددی به دست آورد که اختلاف بین آن‌ها لزوماً دیفرانسیل کامل نیست ولی معادلات اویلرلاگرانژ برای همه آن‌ها همان مجموعهٔ معادلات (۵) است [۲]. با این وصف می‌توانیم محدودهٔ لاگرانژی‌های هم‌ارز را از رابطهٔ (۴) گسترده‌تر بدانیم. اکنون اگر با استفاده از مجموعهٔ لاگرانژی‌های (۴) که اختلافشان یک دیفرانسیل کامل است به کوانتش سیستم کلاسیک انجام دهیم، همگی منجر به یک سیستم کوانتومی یکسان می‌شوند که در توافق با نتایج تجربی است. اما کوانتش متعارف با استفاده از لاگرانژی‌های هم‌ارزی که در (۴) صدق نمی‌کنند نتایج مغایر با تجربه به دست می‌دهد. درست است که همهٔ این توابع در مکانیک کلاسیک منجر به یک معادلهٔ مشابه می‌شوند ولی در حد کوانتومی سیستم‌های مختلف با فیزیک متفاوت و نتایج تجربی ناهمسان می‌دهند؛ آشکار است که در سطح کوانتومی، کوانتش همه لاگرانژی‌های هم‌ارز نتایج صحیح نمی‌دهد و در نتیجه همهٔ آن‌ها قابل قبول نیستند.

شاید با یک مثال مطالب گفته شده روشن‌تر شود. این مثال از [۳] گرفته شده. فرض کنید ذره‌ای در پتانسیل با تقارن کروی به شکل $V=V(r,t)$ حرکت می‌کند که $r=\sqrt{q^iq^i}$ فاصلهٔ شعاعی و q^i ها مختصات دکارتی ذره هستند. یک دسته از لاگرانژی‌های هم‌ارز برای این سیستم به شکل زیر نوشته می‌شود

$$L=T-V+\frac{\gamma J}{r^2} \qquad (۶)$$

که در آن γ یک ثابت اختیاری و J اندازهٔ بردار تکانهٔ زاویه‌ای کل است. توجه داشته باشید که اختلاف این تابع با لاگرانژی متعارف- یعنی لاگرانژی (۳)- دیفرانسیل کامل نیست. تکانه‌های وابسته به مختصات به صورت زیر هستند

$$p^i=u^i+\frac{\gamma}{Jr^2}\left(u^ir^2-q^iu^sq^s\right) \qquad (۷)$$

که در آن u^i همان سرعت متناظر با مختصه q^i است. بنا براین

$$u^i=p_i-\frac{\gamma}{Jr^2}\left(p_ir^2-q^ip_sq^s\right) \qquad (۸)$$

[Downloaded from jmrph.khu.ac.ir on 2024-11-25]

[DOI: 10.52547/jmrph.2.1.13]

که

$$\bar{J}_k = \epsilon_{kij}(p_i q^j) \quad (۹)$$

$$\bar{J} = \sqrt{\bar{J}^2} = [p_s p_s q^t q^t - (p_s q^s)]^{1/2} \quad (۱۰)$$

در این جا $\bar{J}_k$ مولد دوران‌های بی‌نهایت کوچک تحت عمل کروشهٔ پواسون است. رابطهٔ J_k و $\bar{J}_k$ به این صورت است

$$\bar{J}_k = J_k\left(1 + \frac{\gamma}{J}\right) \quad (۱۱)$$

که نتیجه می‌دهد

$$\bar{J} = J + \gamma \quad (۱۲)$$

هامیلتونی برای این سیستم به شکل زیر به دست می‌آید

$$H = \frac{1}{2}p^2 + V - \frac{\gamma\bar{J}}{r^2} + \frac{\gamma^2}{2r^2} \quad (۱۳)$$

حال می‌توانیم با این هامیلتونی معادلهٔ شرودینگر را تشکیل دهیم و از طریق جداسازی متغیرها جواب را به شکل زیر برحسب هماهنگ‌های کروی بنویسیم

$$\psi_{lm}(r,\theta,\varphi) = \frac{u(r)}{r}Y_l^m(\theta,\varphi) \quad (۱۴)$$

معادله‌ای که برای $u(r)$ به دست می‌آید مشابه معادلهٔ شعاعی برای اتم هیدروژن است با این تفاوت که در جملهٔ گریز از مرکز به جای $l(l+1)$ مقدار زیر جانشین شده

$$l(l+1) - 2\gamma[l(l+1)]^{1/2} + \gamma^2 = \left\{[l(l+1)]^{1/2} - \gamma\right\}^2 \quad (۱۵)$$

این عبارت، ویژهٔ مقدارهای عملگر J^2 را می‌دهد:

$$\left\{[l(l+1)]^{1/2} - \gamma\right\}^2 = \tilde{l}(\tilde{l}+1) \quad (۱۶)$$

اما باید توجه داشت هیچ دلیلی وجود ندارد که $\tilde{l}$ عدد صحیح باشد و یا با توجه به اختیاری بودن γ لزومی ندارد اختلاف دو مقدار $\tilde{l}$ عدد صحیح باشد. همچنین می‌توان دید که طیف کوانتومی هامیلتونی دارای تبهگنی مخصوص پتانسیل کولنی نیست و با طیف هامیلتونی متعارف به وضوح تفاوت دارد که این موضوع منجر به طیفی برای اتم هیدروژن می‌شود که با نتایج تجربی مغایر است. بنابراین به نظر می‌رسد تنها لاگرانژی کلاسیکی که طیف کوانتومی مطابق با طیف اتم هیدروژن در آزمایشگاه است، همان لاگرانژی استاندارد است.

از این مثال و مثال‌های دیگر برمی‌آید که در روش کوانتش متعارف تنها لاگرانژی استاندارد است که به مدل کوانتومی صحیح منجر می‌شود. در واقع موضوع ارتباط مستقیم بین معادلهٔ حرکت کلاسیک و سیستم کوانتیده و برطرف کردن چندگانگی در حد فرمالیزم لاگرانژی و هامیلتونی موضوع کارهای متعددی بوده است [۴]-[۷]. فریمن دایسون گزارش می‌کند که فاینمن ایده به دست آوردن معادلات ماکسول از طریق اعمال شرایط کوانتش بر یک سیستم کلاسیک بدون استفاده از لاگرانژی را داشته است [۸].

[Downloaded from jmrph.khu.ac.ir on 2024-11-25]

[DOI: 10.52547/jmrph.2.1.13]

کار جدید در این مقاله این است که با حذف نقش تابع لاگرانژی و با کوانتش مستقیم، اعتبار لاگرانژی استاندارد را نشان می‌دهیم. در بخش دوم از معادلات حرکت کلاسیک شروع می‌کنیم و با فرض روابط جابه‌جاگری کانونیک، سیستم را کوانتیده می‌کنیم. خواهیم دید که فرض رابطهٔ عدم قطعیت هایزنبرگ، منجر به گزینش لاگرانژی استاندارد خواهد شد. در بخش سوم نوسانگر هماهنگ را به عنوان مثالی برای این روش حل می‌کنیم. در بخش چهارم روش دیگری که بر اساس رهیافت زمان گسسته و فقط با فرض یکانیت عملگر تحول کوانتومی قرار دارد معرفی می‌کنیم و همین مسئله را از دید این روش بررسی می‌کنیم. این روش بر مبنای بحث انجام شده در [۹] قرار دارد. بخش پایانی به نتیجه‌گیری اختصاص دارد.

کوانتش مستقیم از معادلات حرکت

در این روش برای کوانتش به لاگرانژی مراجعه نمی‌کنیم. به جای آن کروشه‌های پواسون را به شکل مستقیم از معادلات حرکت به دست می‌آوریم. یک سیستم کلاسیک با معادلات حرکت زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{x}^i = f^i(x, \dot{x}, t) \tag{۱۷}$$

که در آن جرم همه ذرات را برابر با واحد گرفته‌ایم. همه اندیسهای لاتین از ۱ تا n تغییر می‌کنند. مسئله معکوس حساب وردش در واقع یافتن ماتریس ناتکین w_{ij} است طوری که به ازای یک تابع $L = L(x, \dot{x}, t)$ مجموعهٔ معادلات زیر برقرار باشند

$$w_{ij}\left(\ddot{x}^j - f^j\right) = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial L}{\partial x^i} \tag{۱۸}$$

که در آن w_{ij} تابعی از x و $\dot{x}$ و t است. شرایط لازم و کافی برای وجود w_{ij} و L شرایط هلمهولتز (که شرایط انتگرال‌پذیری هم خوانده می‌شوند) نام دارند و در چهار رابطهٔ زیر خلاصه می‌شوند:

$$w_{ij} = w_{ji} \tag{۱۹}$$

$$\frac{\partial w_{ij}}{\partial \dot{x}^k} = \frac{\partial w_{ik}}{\partial \dot{x}^j} \tag{۲۰}$$

$$\frac{D}{dt} w_{ij} = -\frac{1}{2} w_{ik}\frac{\partial f^k}{\partial \dot{x}^j} - \frac{1}{2} w_{ik}\frac{\partial f^k}{\partial \dot{x}^i} \tag{۲۱}$$

$$\frac{1}{2}\frac{D}{dt}\left(w_{ik}\frac{\partial f^k}{\partial \dot{x}^j} - w_{jk}\frac{\partial f^k}{\partial \dot{x}^i}\right) = w_{ik}\frac{\partial f^k}{\partial x^j} - w_{jk}\frac{\partial f^k}{\partial x^i} \tag{۲۲}$$

که در آن مشتق بر- رویه[1] به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\frac{D}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{x}^j\frac{\partial}{\partial x^j} + f^j\frac{\partial}{\partial \dot{x}^j} \tag{۲۳}$$

اگر لاگرانژی L وجود داشته باشد آن‌گاه ماتریس w_{ij} از رابطهٔ زیر به دست می‌آید

$$w_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j} \tag{۲۴}$$

[1] On-Shell

[Downloaded from jmrph.khu.ac.ir on 2024-11-25]

[DOI: 10.52547/jmrph.2.1.13]

ماتریس به دست آمده در رابطهٔ بالا در شرایط هلمهولتز صدق می‌کند. از سوی دیگر یک نتیجهٔ متداول در مسئلهٔ معکوس حساب وردش بیان می‌کند که اگر بتوانیم یک ماتریس w_{ij} را به عنوان جواب شرایط هلمهولتز بیابیم، آنگاه می‌توان تابع لاگرانژی را به طور یکتا (غیر از یک ضریب عددی و یک جملهٔ دیفرانسیل کامل) از رابطهٔ زیر به دست آورد [۱۰] و [۱۱]:

$$L = -q^i \int_0^1 w_{ij}(\ddot{x}^j - f^j)d\tau + \frac{d}{dt}\int_0^1 \int_0^1 \tau\, q^i \dot{q}^j w_{ij}(t, \tau q, \tau\tau' \dot{q})d\tau d\tau' \qquad (۲۵)$$

اکنون برای کوانتیده کردن سیستم کلاسیکی که با رابطهٔ (۱۷) توصیف می‌شود، ابتدا در فضای هیلبرت عملگرهای Q^i و $\dot{Q}^i$ را به مختصات کلاسیک q^i و $\dot{q}^i$ منسوب می‌کنیم. آنگاه شرط جابه‌جا شدن عملگرها را به شکل زیر اعمال می‌کنیم

$$[Q^i, Q^j] = 0 \qquad (۲۶)$$

مشتق زمانی رابطهٔ بالا نشان می‌دهد که روابط جابه‌جایی بین مختصات و سرعت‌ها یک آرایهٔ متقارن تشکیل می‌دهد:

$$[Q^i, \dot{Q}^j] \equiv i\hbar G^{ij} = i\hbar G^{ji} \qquad (۲۷)$$

در حالت کلی G^{ij} تابعی از Q^i، $\dot{Q}^i$، و t است. مشابه کلاسیک G^{ij} را با g^{ij} نمایش می‌دهیم. می‌توان نشان داد که معکوس ماتریس g^{ij} که آن را با w_{ij} نام‌گذاری می‌کنیم، شرایط هلمهولتز را برآورده می‌کند [۴]. بنابراین یک لاگرانژی L برای این سیستم وجود دارد که به طور یکتا توسط G^{ij} تعیین می‌شود و هر انتخاب برای آن یک تابع لاگرانژی می‌دهد که با بقیه هم‌ارز است. مشتق دوم رابطهٔ (۲۶) نسبت به زمان نتیجه می‌دهد

$$[\dot{Q}^i, \dot{Q}^j] = -\frac{1}{2}[Q^i, F^j] - \frac{1}{2}[F^i, Q^j] \qquad (۲۸)$$

که F مشابه مکانیک کوانتومی نیروی f است. همچنین مشتق کامل زمانی G^{ij} را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$i\hbar \frac{D}{dt} G^{ij} = [\dot{Q}^i, \dot{Q}^j] - [Q^i, F^j] \qquad (۲۹)$$

که نتیجه می‌دهد

$$i\hbar \frac{D}{dt} G^{ij} = \frac{1}{2}[Q^i, F^j] - \frac{1}{2}[F^i, Q^j] \qquad (۳۰)$$

اگر شکل استاندارد روابط جابه‌جایی که منجر به روابط عدم قطعیت هایزنبرگ می‌شود را در نظر بگیریم، خواهیم داشت

$$G^{ij} = \delta^{ij} \qquad (۳۱)$$

یا

$$[Q^i, \dot{Q}^j] = i\hbar\delta^{ij} \qquad (۳۲)$$

که نتیجه می‌دهد

$$g^{ij} = \delta^{ij} \qquad (۳۳)$$

[Downloaded from jmrph.khu.ac.ir on 2024-11-25]

[DOI: 10.52547/jmrph.2.1.13]

$$w_{ij} = \delta_{ij} \qquad (۳۴)$$

بنابراین خواهیم داشت

$$w_{ij}\left(\ddot{q}^j - f^j\right) = \ddot{q}^i - f^i \qquad (۳۵)$$

حال با استفاده از (۶) می‌توانیم بنویسیم

$$L = -q^i \int_0^1 \left[\ddot{q}^i - f^i(t, \tau q, \tau\dot{q})\right] d\tau + \frac{d}{dt}\int_0^1 \int_0^1 \tau q^i\, \dot{q}^i d\tau d\tau'$$

$$= \frac{1}{2}\left(\dot{q}^i\right)^2 + \int_0^1 f^i(t, \tau q, \tau\dot{q})\, d\left(\tau q^i\right) \qquad (۳۶)$$

بنا بر این با در نظر گرفتن پتانسیل‌های وابسته به سرعت خواهیم داشت

$$L = \frac{1}{2}\left(\dot{q}^i\right)^2 - U(q, \dot{q}, t) = T - U \qquad (۳۷)$$

که در آن T انرژی جنبشی و U انرژی پتانسیل مربوط به نیروی f است. این رابطه همان لاگرانژی متعارفی است که در فیزیک کلاسیک با آن سروکار داریم. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که در کوانتش از دیدگاه مسئلهٔ معکوس حساب وردش، فرض روابط عدم قطعیت هایزنبرگ در سطح کوانتومی منجر به انتخاب لاگرانژی استاندارد از بین همه لاگرانژی‌های هم‌ارز در سطح کلاسیک می‌شود.

مثال: نوسانگر هماهنگ

اکنون به عنوان یک مثال، مدل شناخته شده نوسانگر هماهنگ را با معادلهٔ حرکت زیر در نظر می‌گیریم

$$\ddot{q}^i + q^i = 0\,, \qquad i = 1,2,\dots,n \qquad (۳۸)$$

پس داریم

$$f^i = -q^i \qquad (۳۹)$$

و رابطهٔ عملگری متناظر

$$F^i = Q^i \qquad (۴۰)$$

با جای‌گذاری در رابطهٔ (۳۰) به دست می‌آوریم

$$i\hbar\frac{D}{dt}G^{ij} = -\frac{1}{2}\left[Q^i, Q^j\right] + \frac{1}{2}\left[Q^i, Q^j\right] = 0 \qquad (۴۱)$$

پس در حد کلاسیک

$$\frac{D}{dt}g^{ij} = 0 \qquad (۴۲)$$

[Downloaded from jmrph.khu.ac.ir on 2024-11-25]

[DOI: 10.52547/jmrph.2.1.13]

اگر فرض کنیم g^{ij} وابستگی صریح به زمان نداشته باشد رابطهٔ بالا را می‌توانیم به شکل زیر بنویسیم

$$\dot{q}^k \frac{\partial g^{ij}}{\partial q^k} - \ddot{q}^k \frac{\partial g^{ij}}{\partial \dot{q}^k} = 0 \quad (۴۳)$$

که با توجه به معادلهٔ حرکت خواهیم داشت

$$\dot{q}^k \frac{\partial g^{ij}}{\partial q^k} - q^k \frac{\partial g^{ij}}{\partial \dot{q}^k} = 0 \quad (۴۴)$$

با روش جداسازی متغیرها جواب معادلهٔ دیفرانسیل به طور صریح به دست می‌آید

$$g^{ij} = A^{ij} exp\left[\frac{k}{2}\sum_l \left(\left(q^l\right)^2 + \left(\dot{q}^l\right)^2\right)\right] = A^{ij} exp\left(\frac{kE}{2}\right) \quad (۴۵)$$

که k یک عدد ثابت و E انرژی کل است. بدین طریق هر انتخاب A^{ij} یک جواب جداگانه می‌دهد که منجر به یک لاگرانژی هم‌ارز برای سیستم می‌شود. حال می‌توان نوشت

$$w_{ij} = B_{ij} exp\left(-\frac{kE}{2}\right) \quad (۴۶)$$

که در این رابطهٔ B ماتریس معکوس A است. با استفاده از (۲۵) و با فرض

$$\frac{d}{dt} w^{ij} = 0 \quad (۴۷)$$

خواهیم داشت

$$L = \left(\dot{q}^i \dot{q}^j - q^i q^j\right) \int_0^1 w_{ij} \tau d\tau = C_{ij}\left(\dot{q}^i \dot{q}^j - q^i q^j\right) \quad (۴۸)$$

که

$$C_{ij} = \int_0^1 w_{ij} \tau d\tau \quad (۴۹)$$

به سادگی می‌توان نشان داد

$$\frac{d}{dt} C_{ij} = 0 \quad (۵۰)$$

که به معنای این است که درایه‌های C_{ij} اعداد ثابت هستند. این شکل عام لاگرانژی‌های هم‌ارز برای نوسانگر هماهنگ است. حال اگر شکل استاندارد روابط جابه‌جایی را در نظر بگیریم به لاگرانژی استاندارد می‌رسیم:

$$L = \frac{1}{2}\left[\left(\dot{q}^i\right)^2 - \left(q^i\right)^2\right] \quad (۵۱)$$

بنابراین می‌توان دید که در این روش نقش لاگرانژی در کوانتش حذف شده و روابط جابه‌جایی کوانتومی مستقیماً از معادلات حرکت کلاسیک به دست می‌آیند. در واقع تابع لاگرانژی خود از روابط جابه‌جایی به دست می‌آید.

[Downloaded from jmrph.khu.ac.ir on 2024-11-25]

[DOI: 10.52547/jmrph.2.1.13]

روش زمان گسسته

منشأ روش زمان گسسته از لحاظ تاریخی به حوزهٔ فیزیک مادهٔ چگال برمی‌گردد. این موضوع در نهایت نظریات میدان شبکه[۲] را به وجود آورد که برای پرهیز از برخی مشکلات نظریات میدان با فضا زمان پیوستهٔ راه‌حل‌هایی ارائه می‌دهد. از جمله این که اکثر نتایج عددی در نظریهٔ میدان متعارف در حد اختلالی محاسبه می‌شوند که یک راه حل جدی برای آن همین نظریات میدان شبکه هستند. همچنین در بحث گرانش کوانتومی مقیاس پلانک به عنوان مقیاس طبیعی شناخته می‌شود و چون توان تفکیک همهٔ اندازه‌گیری‌های فضازمان (مستقیم و غیرمستقیم) بسیار بزرگ‌تر از این مقیاس است راهی برای تشخیص پیوسته یا گسسته بودن فضازمان در ابعاد پلانک وجود ندارد. بنابراین بعضی رهیافت‌ها به گرانش کوانتومی از فضازمان گسسته استفاده می‌کنند.

می‌دانیم که مکانیک کوانتومی معمول بر دو بخش سینماتیک و دینامیک استوار است. در رهیافت زمان گسستهٔ سینماتیک کوانتومی تغییر نمی‌کند. اما در دینامیک فرض متعارف کوانتومی بر جای خود باقی است: سیستم کوانتومی یک سیستم دینامیکی است با تحول یکانی. بنابراین:

$$|\Psi_n\rangle = U_{n,n'}|\Psi_{n'}\rangle \qquad (۵۲)$$

در اینجا U عملگری یکانی است که شرط‌های دینامیکی را برآورده می‌کند و n و n' به ترتیب نمایشگر حالت سیستم در ابتدا و انتهای تحول است. در این وضعیت اگر U برای تحول یک‌پله‌ای (از مرحلهٔ n به $n+1$) معلوم باشد، همه چیز معلوم است. در مکانیک کوانتومی برای سیستم‌های وابسته به زمان عملگر تحول در زمان τ به شکل زیر است

$$U[(n+1)\tau, n\tau] = exp\left(\frac{-i}{\hbar}\tau H\right) \qquad (۵۳)$$

اما در حالت زمان گسسته انتقال زمانی بی‌نهایت کوچک وجود ندارد و در نتیجه هامیلتونی به عنوان مولد انتقال زمانی به طور طبیعی ظاهر نمی‌شود. با این حال می‌دانیم روش دیگری برای کوانتش وجود دارد که برای تعریف تحول سیستم نیازی به هامیلتونی ندارد و بنابراین دچار این مشکلات نیست. این روش استفاده از انتگرال مسیر فاینمن است که به همین علت در کوانتش زمان گسسته از آن بهره می‌برند. در موضوع این مقاله چندگانگی نامطلوب در سطح لاگرانژی به سطح هامیلتونی منتقل می‌شود و حل معادلهٔ شرودینگر که از هامیلتونی به دست می‌آید نیز منجر به نتایج چندگانهٔ ناصحیح خواهد شد. به همین دلیل استفاده از کوانتوم زمان گسسته که در بررسی تحول، نقش هامیلتونی را کنار می‌گذارد برای موضوع کار این مقاله رهیافت مفیدی به نظر می‌رسد.

در مکانیک کوانتوم متعارف، ماتریس عملگر تحول به این صورت نوشته می‌شود

$$U(t', t''; x', x'') \equiv \langle x'|U(t', t'')|x''\rangle = A(t', t'') \int [Dx(t)] exp\left\{\frac{1}{\hbar}S[x(t)]\right\} \qquad (۵۴)$$

[2] Lattice field theories

[Downloaded from jmrph.khu.ac.ir on 2024-11-25]

[DOI: 10.52547/jmrph.2.1.13]

که در آن $|x\rangle$ ویژهٔ بردار عملگر مکان، A ثابت بهنجارش که به وسیلهٔ شرط یکانیت تعیین می‌شود، و S کنش است. متغیرهای انتگرال در رابطهٔ بالا آن $x(t)$ هایی هستند که برای آن‌ها داشته باشیم

$$t'' < t < t' \quad (۵۵)$$

یعنی

$$U(t', t''; x', x'') = A(t', t'') \int \prod_{t''<t<t'} dx(t)\, exp\left\{\frac{1}{\hbar} S[x', x(t)|t'' < t < t', x'']\right\} \quad (۵۶)$$

این جا حالت زمان گسسته نیز منجر به رابطهٔ مشابهی می‌شود. در این وضعیت، مسیر مجموعهٔ نقاط x_n است طوری که

$$n'' < n < n' \quad (۵۷)$$

عنصر ماتریسی عملگر تحول را می‌توان به این طریق نوشت:

$$U_{n',n''}(x', x'') = A(t', t'') \int \prod_{n''<n<n'} dx_n\, exp\left\{\frac{1}{\hbar} S(x_{n'}, \dots, x_{n''})\right\} \quad (۵۸)$$

که این جا

$$x_{n'} = x' \quad , \quad x_{n''} = x'' \quad (۵۹)$$

از آن‌جایی که سیستم کوانتومی یک سیستم دینامیکی است داریم

$$U_{n',n'''} = U_{n',n''} U_{n'',n'''} \quad (۶۰)$$

بنابراین

$$U_{n',n'''}(x', x''') = \int dx'' U_{n',n''}(x', x'')\, U_{n'',n'''}(x'', x''') \quad (۶۱)$$

پس خواهیم داشت

$$S_{n',n'''}(x_{n'}, \dots, x_{n'''}) = S_{n',n''}(x_{n'}, \dots, x_{n'''}) + S_{n'',n'''}(x_{n'}, \dots, x_{n'''}) \quad (۶۲)$$

رابطهٔ بالا به این معناست که کنش یک کمیت جمع‌پذیر است. همچنین

$$A_{n',n'''} = A_{n',n''} . A_{n'',n'''} \quad (۶۳)$$

حال اگر بازهٔ مورد نظر را به بازه‌های کوچک‌تر بشکنیم و روابط (۶۲) و (۶۳) را به طور متوالی به کار ببریم به دست می‌آوریم

$$S_{n',n''}(x_{n'}, \dots, x_{n''}) = \sum_{n''<n<n'} S_{n+\frac{1}{2},n-\frac{1}{2}}\left(x_{n+\frac{1}{2}}, x_{n-\frac{1}{2}}\right) \quad (۶۴)$$

و

$$A_{n',n''} = \prod_{n''<n<n'} A_{n+\frac{1}{2},n-\frac{1}{2}} \quad (۶۵)$$

[Downloaded from jmrph.khu.ac.ir on 2024-11-25]

[DOI: 10.52547/jmrph.2.1.13]

بنابراین برای مشخص کردن تحول سیستم، کافیست کنش را برای یکی از بازه‌های زمانی داشته باشیم. با توجه به این موضوع و با تعریف زیر

$$S_n(x,y) \equiv S_{n+\frac{1}{2},n-\frac{1}{2}}(x,y) \quad (۶۶)$$

می‌توانیم عملگر تحول تک‌مرحله‌ای را به شکل زیر بنویسیم

$$U_n(x,y) = A_n exp\left[\frac{i}{\hbar}S_n(x,y)\right] \quad (۶۷)$$

ما معادلهٔ فوق را به عنوان پایهٔ تحول زمانی سیستم در نظر می‌گیریم. با فرض یکانی بودن تحول داریم

$$\int dz U_n(x,y)U_n^*(y,z) = \int dz U_n^*(z,x)\, U_n(z,y) = \delta(x-y) \quad (۶۸)$$

و برحسب کنش

$$\int dz\, exp\left[\frac{i}{\hbar}[S_n(x,z) - S_n(y,z)]\right] = |A_n|^{-2}\delta(x-y) \quad (۶۹)$$

اگر شناسهٔ[3] تابع نمایی را بسط دهیم

$$S_n(x,z) - S_n(y,z) = (x-y).\nabla_x S_n(x,z) + \mathcal{O}(|x-y|^2) \quad (۷۰)$$

رابطهٔ (۶۹) تا اولین مرتبهٔ بسط به این شکل خواهد بود

$$\int dz\, exp\frac{i}{\hbar}[(x-y).\nabla_x S_n(x,z)] = |A_n|^{-2}\delta\left[\frac{i}{\hbar}(x-y)\right] \quad (۷۱)$$

حال تغییر متغیر زیر را انجام می‌دهیم:

$$\tilde{z} \equiv \nabla_x S_n(x,z) \quad (۷۲)$$

در نتیجه

$$\int d\tilde{z}\left|det\left(\frac{\delta z}{\delta \tilde{z}}\right)\right|\ exp\left[\frac{i}{\hbar}(x-y).\tilde{z}\right] = |A_n|^{-2}\delta(x-y) \quad (۷۳)$$

اگر عبارت داخل قدر مطلق زیر علامت انتگرال را به عنوان تابعی از x و $\tilde{z}$ در نظر بگیریم، سمت چپ رابطهٔ بالا در واقع تبدیل فوریه $|det(\delta z/\delta\tilde{z})|$ است. با در نظر گرفتن این موضوع خواهیم داشت

$$\left|det\left(\frac{\delta z}{\delta \tilde{z}}\right)\right| = (2\pi\hbar)^{-3}|A_n|^{-2} \quad (۷۴)$$

بنابراین دترمینان ژاکوبی در رابطه بالا یک عدد ثابت خواهد بود که فقط وابسته به n است:

$$\left|det\left(\frac{\delta z}{\delta \tilde{z}}\right)\right| = c_n \quad (۷۵)$$

پس شرط لازم برای یکانیت خواهد شد

$$det\left[\frac{\partial^2 S_n}{\partial z \partial x}(x,z)\right] = c_n \quad (۷۶)$$

[3] Argument

[Downloaded from jmrph.khu.ac.ir on 2024-11-25]

[DOI: 10.52547/jmrph.2.1.13]

برای سیستم‌های با بعد بزرگ‌تر از ۱، معادلهٔ بالا غیرخطی است و در حالت کلی حل آن دشوار است اما در حالت یک‌بعدی تبدیل به حالت سادهٔ زیر می‌شود

$$\frac{\partial^2 S_n}{\partial x \partial y}(x,y) = c_n \qquad (۷۷)$$

جواب عام برای این معادله عبارت است از

$$S_n(x,y) = c_n xy + f_n(x) + g_n(y) \qquad (۷۸)$$

اکنون تعریف‌های زیر را معرفی می‌کنیم

$$\mu_n \equiv -\tau c_n \qquad (۷۹)$$

$$V_n(x) \equiv \frac{\mu_{n-1/2}+\mu_{n+1/2}}{2\tau^2} - \frac{1}{\tau}\left[f_{n-1/2}(x) + g_{n+1/2}(x)\right] \qquad (۸۰)$$

$$\phi_n(x) \equiv \frac{\mu_{n-1/2}-\mu_{n+1/2}}{4\tau} - \frac{1}{2}\left[f_{n-1/2}(x) + f_{n+1/2}(x)\right] \qquad (۸۱)$$

با این تعریف کنش به شکل زیر نوشته می‌شود

$$S_n(x,y) = \frac{\mu_n}{2\tau}(x-y)^2 - \frac{\tau}{2}\left[V_{n-1/2}(y) + V_{n+1/2}(x)\right] - \phi_{n-1/2}(y) + \phi_{n+1/2}(x) \qquad (۸۲)$$

دو جمله آخر سمت راست را می‌توان از یک تبدیل پیمانه‌ای به دست آورد و به همین دلیل تأثیری در معادلهٔ حرکت ندارد و با حذف آن کلیت مسئله از بین نمی‌رود. پس با حذف این دو جمله کلی‌ترین کنش یک بعدی که شرط یکانیت را برآورده می‌کند در روش زمان گسسته به دست می‌آید. اکنون حد زمان پیوسته را محاسبه می‌کنیم. برای این کار کنش را بر τ تقسیم می‌کنیم و حد آن را وقتی τ به سمت صفر میل می‌کند به دست می‌آوریم. در این حد داریم

$$\lim_{\tau\to 0} \frac{S_n\left(x_{n+1/2}, x_{n-1/2}\right)}{\tau} = L[x(t)] \qquad (۸۳)$$

بنابراین با توجه به معادلهٔ (۸۲) و با حذف دو جملهٔ آخر، پس از حدگیری خواهیم داشت

$$L[x(t)] = \frac{\mu}{2}\dot{x}^2 - V(x,t) \qquad (۸۴)$$

این همان لاگرانژی استاندارد ذره در یک بعد است. در نتیجه حل معادلهٔ به دست آمده از شرط یکانیت (که می‌توان آن را به عنوان یک اصل اولیه در نظر گرفت) در حد زمان پیوسته منجر به لاگرانژی متعارف می‌شود. اما لاگرانژی‌های هم‌ارز منجر به کنش‌های دیگر و در نتیجه احتمالاً معادلات حرکت دیگر در زمان گسسته خواهند شد. در این حالت نیز می‌توان نشان داد چه در حالت زمان گسسته و چه در حد زمان پیوستهٔ آن، کنش‌های یک بعدی که معادلهٔ حرکت کلاسیک ناشی از آن‌ها یکی است، مضرب ثابتی از هم هستند.

[Downloaded from jmrph.khu.ac.ir on 2024-11-25]
[DOI: 10.52547/jmrph.2.1.13]

همان‌طور که قبلاً گفته شد حل معادلهٔ (۷۶) در بعد بالاتر از ۱ فرآیند پیچیده‌ای دارد. با این حال حل اختلالی در برخی حالت‌ها قابل کاربرد است. مثلاً در برهمکنش الکترومغناطیسی می‌توان از این روش استفاده کرد که باز هم لاگرانژی متعارف را می‌دهد.

نتیجه‌گیری

همان‌طور که در مقدمه گفته شد در حوزهٔ مکانیک کلاسیک یک چندگانگی بین لاگرانژی‌های هم‌ارز وجود دارد که باعث می‌شود توابع لاگرانژی که تفاوت آن‌ها در یک جملهٔ دیفرانسیل کامل نیست یک معادلهٔ حرکت یکسان را بدهند و اختلاف فیزیکی بین آن‌ها پنهان بماند. اما به نظر می‌رسد هنگانی که این توابع کوانتیده می‌شوند تنها لاگرانژی استاندارد (یعنی تفاوت انرژی جنبشی و پتانسیل) است که منجر به نتایج فیزیکی در توافق با تجربه می‌شود. با توجه به بحث‌های انجام شده در این مقاله دیده می‌شود که دو روش رهیافت جبری به مسئلهٔ معکوس حساب وردش و روش کوانتش در حالت زمان گسسته به طور اصولی این فرض را تأیید می‌کنند که لاگرانژی استاندارد (و یا ضریبی از آن به علاوه یک جمله دیفرانسیل کامل) منجر به پیش‌بینی فیزیکی صحیح می‌شود.

منابع

1. R. A. Matzner and L. C. Shepley, “Classical Mechanics”, 1991, Prentice hall.

2. H. Helmholz, Journ. f. d. reine u. angew. Math., 100 (1887) 137.

3. M. Henneaux and L. C. Shepley, “Lagrangian for spherically symmetric potentials”, 23 (1982) 2101-2107.

4. S.A. Hojman and L. C. Shepley, “No Lagrangian - No quantization”, J. Math. Phys. 32 (1991) 142-146.

5. A. O. Bolivar, “Dynamical quantization and classical limit”, Can. J. Phys. 81 (2003) 663-673.

6. Elisa Ercolessi, Giuseppe Marmo, Giuseppe Morandi, “From the Equations of Motion to the Canonical Commutation Relations”, Riv. Nuovo Cim. 33 (2010) 401-590.

7. S. A. Hojman, J. Gamboa, F. Mendez, “Dynamics determines geometry”, Mod. Phys. Lett. A, 27 (2012) 1250186.

8. F. J. Dyson, “Feynman’s proof of the Maxwell equations”, Am. J. Phys. 58 (1990) 209-211.

۹- محمد خرمی، فرمول‌بندی فیزیک فضازمان گسسته، پایان‌نامهٔ دکتری، آبان ۱۳۷۲، دانشگاه صنعتی شریف.

10. E. Engels, "A method for the computation of a Lagrangian within the context of the inverse problem of Newtonian mechanics," Hadronic J. 1, 465 (1978).

11. F. Pardo, “The Helmholtz conditions in terms of constants of motion in classical mechanics”, J. Math. Phys. 30 (1989) 2054-2061.

[Downloaded from jmrph.khu.ac.ir on 2024-11-25]

[DOI: 10.52547/jmrph.2.1.13]