

## بررسی اثرات میدان مغناطوگرانشی در کره و نوار چرخان بر مسیر ذره‌آزمون

بهروز ملک‌الکلامی<sup>۱</sup>، عبدالجبار شکری<sup>۲\*</sup>، کامل داودی<sup>۱</sup>

<sup>۱</sup>گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه کردستان، سنندج، ایران

<sup>۲</sup>گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران

### اطلاعات مقاله

تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۰۶/۲۳

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۰۸/۲۸

تاریخ چاپ: ۱۴۰۴/۱۰/۰۸

شاپای چاپی: 2588-493x  
شاپای الکترونیکی: 2588-4921

\* نویسنده مسئول

[ajshokri1975@pnu.ac.ir](mailto:ajshokri1975@pnu.ac.ir)



**چکیده**

روش‌های مختلفی برای حل معادلات میدان اینشتین در برهم‌کنش گرانشی بین ذرات وجود دارد، که یکی از این روش‌ها تقریب میدان ضعیف می‌باشد. در تقریب میدان ضعیف، میدان‌های گرانشی همانند میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی در معادلاتی شبیه به معادلات ماکسول صدق می‌کنند و به معادلات شبه ماکسولی در گرانش مشهور هستند. در الکترومغناطوگرانش به کمک پتانسیل‌های برداری و نرده‌ای می‌توان مسیر حرکت ذره‌آزمون را در این میدان‌ها تعیین کرد. در این مقاله از روش تقریب میدان ضعیف، برای استخراج معادلات حاکم بر حرکت ذره‌آزمون در میدان الکترومغناطوگرانشی ناشی از سیستم‌های گرانشی کره و نوار چرخان استفاده گردید. همچنین به کمک روش‌های محاسبات عددی و با استفاده از نرم‌افزارهای مربوطه، مسیر حرکت ذره‌آزمون در چنین میدان‌هایی در حالت‌های مختلف ترسیم و با هم مقایسه شده است. نتایج بدست آمده نشان می‌دهد که مسیر حرکت ذره‌آزمون از ساکن بودن یا چرخیدن کره و نوار با هم یا جداگانه تاثیر می‌پذیرد. همچنین اندازه‌ی سرعت زاویه‌ای مربوط به چرخش کره و نوار به شدت روی مسیر حرکت ذره‌آزمون تاثیر گذار است. از طرفی دیگر، با بررسی نسبت سرعت زاویه‌ای نوار به کره، الگوهای متفاوتی از مسیر حرکت ذره‌آزمون مشاهده شد.

**واژگان کلیدی:** مغناطوگرانش، ذره‌آزمون، مدل سازی، کره چرخان، نوار چرخان.

وجود دارد. این امر باعث شد که در جستجوی پدیده‌هایی باشند، که در الکترومغناطیس اتفاق می‌افتد اما در گرانش مشاهده نشده است. یکی از این موارد بار الکتریکی متحرک است که در اطراف خود میدان مغناطیسی ایجاد می‌کند. بنابراین انتظار می‌رود که ذره‌آزمون متحرک یا توزیع جرم متحرک، نیز در اطراف خود میدانی مشابه ایجاد کند.

### مقدمه

در سال‌های اخیر دانشمندان فیزیک با توجه به شباهت میان

قانون جهانی گرانش  $F=G\frac{m_1m_2}{r^2}$  و قانون کولمب  $F=K\frac{q_1q_2}{r^2}$  به دنبال

این موضوع بودند که چه ارتباطی بین گرانش و الکترومغناطیس

هستی کمک شایانی کرده است. در اینجا به چند مورد از این تحقیقات اشاره شده است. ویکتور [۶] گرانش الکترومغناطیس و مدارهای ستاره‌ای در کهکشان‌ها را بررسی کرد و مشاهده نمود که سهم حاصل از گرانش مغناطیسی برای داشتن تأثیر قابل مشاهده بر مدارهای ستاره‌ای در کهکشان راه شیری بسیار ناچیز است. بنابراین نشان داد که نه پتانسیل گرانشی و نه شرایط مرزی کیهانی نمی‌توانند منحنی‌های چرخش غیرعادی کهکشان‌های مارپیچی را توضیح دهند. کاپوژیلو و همکاران [۷] تصحیحات مدارهای نسبیتی با در نظر گرفتن تقریب‌های مرتبه بالاتر ناشی از اثرات گرانش مغناطیسی را بررسی کردند. نویسندگان در این مقاله تقریب‌های مرتبه بالاتر را در حد میدان ضعیف میدان گرانشی، بر اساس نظریه نیوتنی، در نظر گرفتند و معادلات حرکت را با در نظر گرفتن اثرات گرانش مغناطیسی استخراج و نتایج عددی را برای مدارها و تصویر فضای فاز آنها ارائه دادند. در نهایت تأثیر گرانشی-مغناطیسی بر مدارهای نسبیتی بررسی کردند و نشان دادند که این اثرات می‌توانند پدیده‌های جدیدی مانند اثر تغذیه‌ای و گذار به رفتار آشوبناک را ایجاد کنند. گاروفی و همکاران [۸] اصلاحات نظریه نسبیتی مدارها را با در نظر گرفتن تقریب‌های مرتبه بالاتر ناشی از اثرات گرانشی-مغناطیسی مورد بررسی قرار دادند. نتیجه گرفتند که علاوه بر اثر استاندارد حضيض مداری نسبت عام، یک اثر نوسانی جدید نیز به دلیل تصحیح مداری یافت می‌شود. با توجه به وجود این اثر نوسانی جدید، امواج گرانشی ساطع شده توسط یک جسم فشرده (ستاره نوترونی یا سیاهچاله) که به دور یک سیاهچاله کلان جرم در حال گردش است، از طریق تقریب چهار قطبی مورد مطالعه قرار دادند. نویسندگان بیان کردند که در تقریب خطی میدان ضعیف و حرکت آهسته نسبت عام، اثرات گرانش مغناطیسی از اجزای غیر قطری تانسور متریک فضا-زمان ناشی می‌شوند و با چگالی جریان ماده متناسب هستند.

در این مقاله به اثرات گرانش مغناطیسی بر روی مسیر ذره‌آزمون در میدان گرانشی سیستم کره و نوار جرم‌دار چرخان پرداخته شده است. این کار در واقع تعمیمی از مسئله کره و حلقه چرخان است که در مرجع [۹] مورد بحث قرار گرفته است. در واقع مهم‌ترین انگیزه برای انتخاب کره و نوار چرخان وجود نمونه‌های سماوی آن مانند سیاره زحل و حلقه‌های

ماکسول پس از فرمول بندی معادلات الکترومغناطیس توجه خود را به این موضوع معطوف کرده بود که آیا امکان دارد تئوری گرانش را به شکل معادلاتی شبیه به معادلات الکترومغناطیس نوشت؟ هوساید تشابه گرانش و الکترومغناطیس را با در نظر گرفتن بردار پوئین تینگ گرانشی که انرژی گرانشی را به صورت یک جریان موضعی در واحد سطح منتشر می‌کرد در نظر گرفت، اما نتوانست موضوع انرژی گرانشی و امواج گرانشی را در یک نظام هم وردا و یکپارچه تدوین کند.

در نیمه دوم قرن نوزدهم تعدادی از دانشمندان همچون هولزموئلر و تیززند این ادعا را مطرح کردند، که نیروی گرانشی خورشید به سیارات منظومه شمسی وارد می‌کند، به علت دوران خورشید حول محور خودش است که دارای یک مولفه ی مغناطیسی می‌باشد (میدان گرانش مغناطیسی). اگر این بخش را در معادلات مدارهای سیارات وارد کنیم منجر به تصحیح مدار سیارات می‌شود. در نتیجه این امر می‌تواند باعث حرکت تقدیمی برای اجرام سماوی گردد [۱۰ و ۱۱]. تأثیر وجود میدان گرانش مغناطیسی که توسط نظریه نسبیت عام نیز پیش‌بینی شده بود، برای اولین بار توسط دوستیته [۱۲] و بعدها به شکل عمومی به وسیله لنز وترینگ بررسی شد [۱۳].

ناسا در سال ۲۰۰۴ برای بررسی دقیق‌تر گرانش مغناطیسی، پروژه B-GP را انجام داد. در این پروژه تحقیقاتی، ماهواره‌ای را به ارتفاع ۴۰۰ مایلی در مداری در قطب زمین فرستاد. این ماهواره دارای ۴ ژيروسکوپ ابرسانا بود که هر کدام با سرعت زاویه‌ای ۱۰ هزار دور در دقیقه به دور خود می‌چرخیدند. از لحاظ تئوری انتظار می‌رود این ژيروسکوپ‌ها در حین دور زدن زمین بلرزد (حرکت تقدیمی). بنابراین این لرزش باعث جابجا شدن محور دورانشان می‌شد. محاسبات تئوری نشان داده است که در مدت یک سال محور دوران آن‌ها باید ۴۲ میلی ثانیه قوسی جابجا شود، اما مقدار جابجایی اندازه گیری شده توسط ماهواره در حدود یک صدم این مقدار اندازه‌گیری شده است [۱۴]. البته در جاهای دیگری از عالم این میدان (مغناطیس گرانشی) بسیار قوی‌تر است. برای مثال در اطراف یک ستاره نوترونی جت‌های روشنی از ماده با سرعتی نزدیک به سرعت نور به بیرون پرتاب می‌شوند، دانشمندان بر این باورند که این جت‌ها از میدان گرانش مغناطیسی قوی در اطراف ستاره نوترونی انرژی می‌گیرند.

اگر چه تحقیقات انجام شده با استفاده از محاسبات عددی در مورد گرانش الکترومغناطیسی، با در نظر گرفتن تقریب میدان ضعیف، خیلی زیاد نمی‌باشد. اما این تحقیقات، به درک عمیق‌تری از عالم

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (3)$$

در این رابطه  $\eta_{\mu\nu}$  متریک مینکوفسکی و  $h_{\mu\nu}$  اختلال فضا-زمان می‌باشد ( $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ ).

با وارد کردن متریک فوق در معادلات اینشتین و خطی سازی آن، معادله زیر بدست می‌آید:

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -2kT_{\mu\nu} \quad (4)$$

برای بحث مفصل در مورد بدست آوردن معادله (4) می‌توان به منابع بسیاری از جمله منابع این مقاله مراجعه نمود. معادله (4) از نظر شکل ریاضی همان معادله موج ناهمگن است و جواب آن بصورت زیر است:

$$\bar{h}_{\mu\nu}(ct, \vec{x}) = -\frac{4G}{c^4} \int \frac{T_{\mu\nu}(ct - |\vec{x} - \vec{x}'|, \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x' \quad (5)$$

در این رابطه  $\vec{x}'$  مختصات سه بعدی المان حجم  $\vec{x}$  و مختصات نقطه مشاهده است، بنابراین هدف محاسبه  $h_{\mu\nu}$  در آن نقطه است. معادله (5) جواب خصوصی معادله موج است و به جواب تاخیری معادله موج هم مشهور است. در حالت منبع پایا معادله بالا به معادله زیر تقلیل پیدا می‌کند:

$$\bar{h}^{\mu\nu}(\vec{x}) = -\frac{4G}{c^4} \int \frac{T^{\mu\nu}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x' \quad (6)$$

با قرار دادن  $h_{00} = h_{11} = h_{22} = h_{33} = 2\phi/c^2$  و  $h_{0i} = -2\frac{A_{ig}}{c^2}$  متریک میدان ضعیف به صورت زیر به دست می‌آید:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -c^2 \left(1 - 2\frac{\phi}{c^2}\right) dt^2 - \frac{4}{c} (\vec{A}_g \cdot d\vec{x}) dt + \left(1 + 2\frac{\phi_g}{c^2}\right) \delta_{ij} dx^i dx^j \quad (7)$$

که در آن  $\delta_{ij}$  دلتای کرونکر سه بعدی است. کمیت‌های  $\phi$  و  $\vec{A}$  را به ترتیب پتانسیل‌های اسکالر گرانشی و برداری گرانشی می‌نامند که در آن میدان گرانش مغناطیسی ناشی از قسمت برداری است. با تقریب مناسب در نقاط دور از مبدأ، این دو پتانسل را می‌توان به صورت زیر نوشت [6]:

اطراف آن می‌باشد. هدف این مقاله نشان دادن اثرات تصحیحی گرانش مغناطیسی بر روی مدارهای ذره‌ی آزمون در مجاورت کره و نوار چرخان است که حالت در نظر گرفته شده یک سیستم زحل مانند بوده (نه بعنوان حالت کاربردی برای منظومه شمسی یا خود سیاره زحل). بنابراین ممکن است بعضی از مقادیر عددی انتخاب شده با داده‌های نجومی همخوانی نداشته باشد.

برای این کار ابتدا لاگرانژین نسبیتی که شامل میدان گرانش-مغناطیسی می‌باشد، معرفی شده است. سپس با استفاده از آن معادلات حرکت ذره‌ی آزمون بدست آورده و با کمک نرم افزارهای مربوطه مسیرهای ذره آزمون، که در واقع اثرات میدان گرانشی مغناطیسی را نشان می‌دهند ترسیم گردیده است.

### ۱- میدان گرانش مغناطیسی

میدان و پتانسیل گرانشی در هر ناحیه از فضا به وسیله توزیع ماده تعیین می‌شود، بنابراین اگر  $\rho$  چگالی ماده باشد، میدان گرانشی را می‌توان از یک تابع پتانسیل  $V$  که در معادله پواسون  $\nabla^2 V = 4\pi G \rho$  صدق می‌کند بدست آورد. از دیدگاه نیوتن فضا و زمان مستقل هستند، اما در نسبیت عام فضا و زمان موجودیت مستقلی ندارند. در نسبیت عام، فضا-زمان به صورت یک روبه چهار بعدی است که نقاط آن را با مختصات  $(x^\mu) = (x^0, x^1, x^2, x^3)$  مشخص می‌شود. همچنین  $ds$  المان فاصله برای فضا-زمان بین دو نقطه مجاور به صورت زیر است [۱۰ و ۱۱]:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (1)$$

که در آن  $g_{\mu\nu}$  تانسور متریک می‌باشد.

برای تعیین متریک فضا زمان باید معادلات میدان اینشتین را حل کرد، یعنی:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = kT_{\mu\nu} \quad (2)$$

که در آن  $T_{\mu\nu}$  تانسور تکانه انرژی و  $k = \frac{8\pi G}{c^4}$  می‌باشد.

اگر فرض شود متریک فضا-زمان بعلت وجود جرم، از متریک فضا-زمان تخت (متریک مینکوفسکی) به اندازه مقدار خیلی کم انحراف پیدا می‌کند و سرعت‌ها در مقایسه با سرعت نور کوچک باشند، چنین متریکی را متریک میدان ضعیف می‌نامند [۱۲]:

برای یک منبع جرم که توزیع جرم آن در نزدیکی مبدا متمرکز شده باشد پتانسیل برداری مغناطوگرانشی  $\vec{A}$  و پتانسیل نرده‌ای مغناطوگرانشی  $\phi$  از رابطه‌های (۸) بدست می‌آیند. در این بخش، ابتدا سیستمی را که فقط شامل کره‌ای به جرم  $M$  و با سرعت زاویه‌ای  $\omega_s$  به دور محور  $Z$  می‌چرخد، مورد نظر است. برای این سیستم پتانسیل‌های برداری  $\vec{A}$  و نرده‌ای  $\phi$  در دستگاه مختصات کروی به صورت زیر بیان می‌شوند [۹ و ۱۲]:

$$V_s(r) = -\frac{GM}{r} \quad (12)$$

$$\vec{A}_s(\vec{r}) = -\frac{G}{c^2} \frac{l_s}{2} \frac{\sin \theta}{r^2} \hat{\phi}$$

که در آن  $l_s$  تکانه زاویه‌ای نیوتنی کره است که برابر با  $l_s = \frac{2}{5} MR^2 \omega_s$  می‌باشد. در اینجا پتانسیل‌های اسکالری و برداری گرانشی برای حالت کره و حلقه مد نظر است:

$$V_R(r) = -Gm \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n} (n!)^2} P_{2n}(\cos \theta) \frac{a^{2n}}{r^{2n+1}} \quad (13)$$

$$\vec{A}_R(\vec{r}) = -\frac{G}{c^2} l_R \quad (14)$$

$$\times \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{(2n+2)!} \frac{(2n+1)!}{(2^n n!)^2} P_{2n+1}^1(\cos \theta) \frac{a^{2n}}{r^{2n+2}} \hat{\phi}$$

که در آن  $l_R$  تکانه زاویه‌ای حلقه است [۱۱].

اگر در معادلات (۱۳) و (۱۴) از عبارات شامل توان‌های  $1/r^2$  به بالاتر صرف نظر شود، معادلات در تقریب مرتبه اول به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$V_R(\vec{r}) = -\frac{Gm}{r} \quad (15)$$

$$\vec{A}_R(\vec{r}) = -\frac{G}{2c} \frac{l_R}{r^2} \sin \theta \hat{\phi}(\varphi)$$

با توجه به تقریب مذکور در پتانسیل‌ها، می‌توان معادله (۱۵) را برای سیستم کره و نوار مسطح بکار برد که در آن بجای تکانه زاویه حلقه باید تکانه زاویه نوار را لحاظ کرد. بنابراین برای سیستم مورد نظر پتانسیل‌های گرانشی کل (پتانسیل کره و پتانسیل نوار) رابطه (۱۵) بصورت زیر در خواهد آمد:

$$\phi_g = -\frac{GM}{r} \quad (8)$$

$$\vec{A}_g = -\frac{G}{2c^2} \frac{\vec{J} \times \vec{r}}{r^3}$$

که در آن  $\vec{J}$  بردار تکانه زاویه‌ای منبع دوار و  $M$  جرم کل آن است. شرط لورنتس نیز برحسب این دو پتانسیل به صورت زیر در می‌آید:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \phi_g}{\partial t} + \nabla \cdot \left( \frac{1}{2} \vec{A}_g \right) = 0 \quad (9)$$

در الکترومغناطیس، شرط لورنتس به صورت رابطه‌ای خیلی شبیه به رابطه بالا است. فقط تفاوت در ضریب یک دوم است، زیرا اسپین گراویتون، به عنوان ذره‌ی واسطه، در برهم‌کنش‌های گرانشی برابر دو است. لازم به یادآوری است، که با استفاده از معادلات ژئودزیک  $\ddot{x}^\sigma + \Gamma^\sigma_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0$  می‌توان نیروی وارد بر یک ذره‌ی آزمون را در میدان الکترومغناطوگرانش بصورت زیر بدست آورد:

$$\vec{F}_g = -m\vec{E}_g - 2m \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}_g \quad (10)$$

که در آن صرفنظر از ضریب ۲ همان معادله نیروی لورنتس در الکترومغناطیس است که به جای بار  $q$ ، جرم  $m$  قرار داده شده است. در ضمن  $\vec{E}_g$  و  $\vec{B}_g$  به ترتیب میدانهای الکتروگرانش و مغناطوگرانش می‌باشند.

### ۱-۱ لاگرانژین نسبیتی و معادلات حرکت

در نسبیت لاگرانژی یک ذره به جرم  $m$  را می‌توان بصورت  $L = -mc(ds/dt)$  نوشت. حال اگر در رابطه (۷) عبارت  $ds/dt$  را محاسبه و فقط مرتبه‌های خط  $\vec{A}$  و  $\phi$  نگه داشته شود، در این صورت لاگرانژی ذره آزمونی که در فضا زمان تخت مختل شده حرکت می‌کند، می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$L = -m_p c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} + m \gamma \left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right) \phi - \frac{2m}{c} \gamma \vec{v} \cdot \vec{A} \quad (11)$$

که در آن  $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2/c^2}$  و  $m_p$  جرم ذره‌ی آزمون است.

$$\ddot{\phi} = -\frac{2}{r} \dot{r} \dot{\phi} - 2 \cot \theta \dot{\theta} \dot{\phi} + \frac{G}{c^2} \frac{(l_s + l_R)}{r^3} \cot \theta \dot{\theta} - \frac{G}{2c^2} \frac{(l_s + l_R)}{r^4} \dot{r} \quad (20)$$

سه معادله بالا یک دسته معادله کوپل غیرخطی هستند که بدست آوردن جواب‌های تحلیلی و دقیق برای آنها امکان پذیر نمی‌باشد. بنابراین برای حل آن‌ها از روش‌های محاسبات عددی (که توسط نرم افزار ماتمیتیکا اجرا شده) استفاده گردید. از طرفی چون مؤلفه تکانه زاویه در راستای محور Z و همچنین انرژی ثابت‌های حرکت هستند، بنابراین مسیر حرکت ذره آزمون محدود به یک صفحه (مثلا X-Y) می‌باشد. در این اینجا با انتخاب  $\theta = 0$ ،  $\dot{\theta} = \frac{\pi}{2}$  و  $c = 1$  معادلات (۱۸) تا (۲۰) به معادلات زیر تقلیل پیدا می‌کنند:

$$\ddot{r} = r \dot{\phi}^2 - \frac{G(M+m)}{r^2} + \frac{G}{2} \frac{(l_s + l_b)}{r^2} \dot{\phi} \quad (21)$$

$$\ddot{\phi} = -\frac{2}{r} \dot{r} \dot{\phi} - \frac{G}{2} \frac{(l_s + l_b)}{r^4} \dot{r} \quad (22)$$

برای بکار گیری روش عددی باید شرایط اولیه حاکم بر ذره معلوم باشد، که در اینجا بصورت زیر فرض شده است:

$$\begin{aligned} \phi(0) &= 0, & \dot{r} &= 0 \\ r(0) &= r_0, & \dot{\phi}(0) &= 0.0041 \end{aligned} \quad (23)$$

همچنین پارامترهای مربوط به سیستم کره، نوار و ذره آزمون در جدول ۱ ارائه شده است.

جدول ۱. پارامترهای سیستم کره و نوار چرخان.

مقادیر	نماد	جرم	کره
$10^{24} \text{ kg}$	$M$	جرم	
$2 \times 10^4 \text{ m}$	$R$	شعاع	
$2 \times 10^{-8} \text{ s}^{-1}$	$\omega_s$	سرعت زاویه	
$M/4$	$m$	جرم	
$1.5R$	$a$	شعاع درونی	نوار
$2.5R$	$b$	شعاع بیرونی	
$2 \times 10^{-8} \text{ s}^{-1}$	$\omega_R$	سرعت زاویه	
$1 \text{ kg}$	$m_p$	جرم	ذره آزمون
$100R$	$r_a$	شعاع حضيض	
$500R$	$r_p$	شعاع اوج	

که در آن  $r_a$  و  $r_p$  به ترتیب فاصله حضيض و اوج مدار حرکت ذره آزمون هستند.

$$V(\vec{r}) = -\frac{G(M+m)}{r} \quad (16)$$

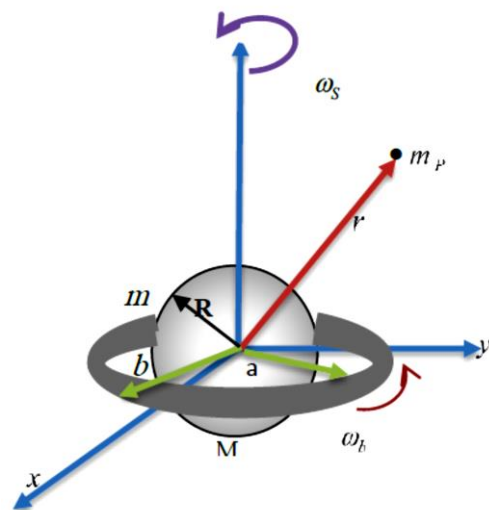
$$\vec{A}(\vec{r}) = -\frac{G}{2c^2} \frac{(l_s + l_b)}{r^2} \sin \theta \hat{\phi}$$

که در آن  $l_b = (m(a^2 + b^2)\omega_b)/2$  تکانه زاویه‌ای نوار و  $l_s = (2MR^2\omega_s)/5$  تکانه زاویه‌ای کره می‌باشد.

اگر از معادله لاگرانژی یک ذره (یعنی معادله ۱۱)، که با سرعتی غیر نسبیتی در میدان گرانش مغناطیسی این سیستم حرکت می‌کند استفاده شود، نتیجه به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} L(\vec{r}, \vec{v}, t) &= \frac{m_p}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) \\ &+ Gm_p \frac{(M+m)}{r} - \frac{Gm_p}{2c^2} \frac{(l_s + l_R)}{r} \sin^2 \theta \dot{\phi} \end{aligned} \quad (17)$$

در این معادله عبارت سوم ناشی از برهمکنش ذره آزمون با پتانسیل برداری  $\vec{A}$  است.



شکل ۱. نمای طرح‌واره کره و نوار چرخان.

اکنون با استفاده از لاگرانژین داده شده توسط معادله (۱۷)

می‌توان معادلات حرکت را بصورت زیر استخراج کرد [۸]:

$$\ddot{r} = r \dot{\phi}^2 + r \sin^2 \theta \dot{\theta}^2 - G \frac{(M+m)}{r^2} + \frac{G}{2c^2} \frac{(l_s + l_R)}{r^2} \sin^2 \theta \dot{\phi} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} &= \frac{\sin 2\theta}{2} \dot{\phi}^2 - \frac{2}{r} \dot{r} \dot{\theta} \\ &- \frac{G}{2c^2} \frac{(l_s + l_R)}{r^3} \sin 2\theta \dot{\phi}, \end{aligned} \quad (19)$$

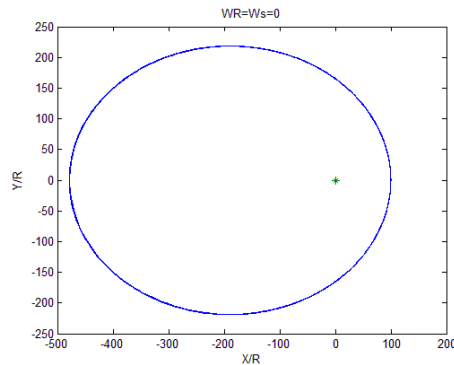
## ۲- بحث و نتیجه‌گیری

در این بخش شکل مسیر حرکت ذره آزمون با استفاده از نرم افزار مربوطه برای دو حالت مختلف بررسی و ترسیم شده است. در حالت اول در سیستم کره و نوار چرخان فرض شده که شعاع داخلی و خارجی نوار ثابت باشد ( $a = 1.5R, b = 2.5R$ ) و در حالت دوم با وجود ثابت بودن سرعت زاویه‌ای مربوط به سیستم کره ( $\omega_b = 2 \times 10^{-8} s^{-1}$ ) اما نوار چرخان ( $\omega_s = 2 \times 10^{-8} s^{-1}$ ) مقادیر شعاع‌های داخلی و خارجی نوار تغییر داده می‌شوند.

### ۲-۱- حالت اول

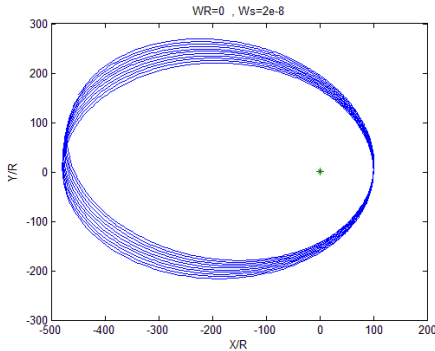
در این بخش با ثابت نگه داشتن شعاع‌های داخلی و خارجی، مسیر ذره آزمون را برای مقادیر مختلف سرعت زاویه‌های سیستم کره و نوار بررسی شده است.

در شکل ۲ مربوط به سیستم کره و نوار، حالتی بررسی شده که در آن هر دو سیستم کره و نوار بدون چرخش باشند ( $\omega_b = 0, \omega_s = 0$ ). در این حالت فقط پتانسیل نرده‌ای بر روی مسیر ذره آزمون اثر می‌گذارد، بنابراین ذره در مدار دایره‌ای با شعاع ثابت حرکت می‌کند.



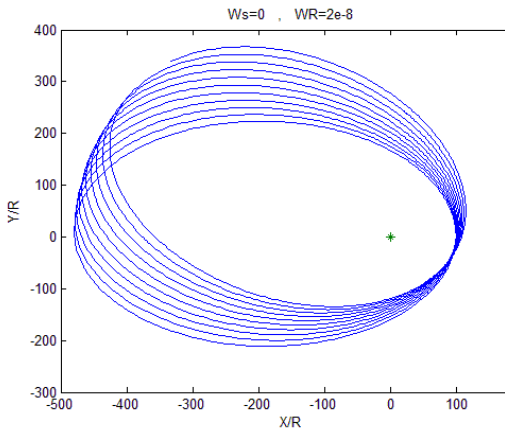
شکل ۲. مسیر حرکت ذره آزمون برای کره و نوار ساکن.

در شکل ۳ نوار ساکن ( $\omega_b = 0$ ) و کره متحرک که با سرعت زاویه کوچکی ( $\omega_s = 2e^{-8}$ ) بصورت پادساعتگرد به دور خود می‌چرخد، بررسی شده است. مسیر حرکت ذره که در میدان گرانشی مغناطیسی این سیستم رسم شده، متفاوت با حالتی است که هر دو ساکن هستند. در این حالت مسیر حرکت ذره آزمون دیگر یک دایره مشخصی نیست بلکه هر بار یک دایره دیگر اما با شعاع یکسان طی می‌کنند.



شکل ۳. مسیر حرکت ذره آزمون برای کره چرخان و نوار ساکن.

در شکل ۴ مسیر حرکت ذره آزمون برای حالتی که کره ساکن ( $\omega_s = 0$ ) و نوار چرخان ( $\omega_b = 2e^{-8}$ ) می‌باشد، ترسیم شده است. با توجه به شکل اثر چرخش نوار بر روی مسیر حرکت ذره آزمون شبیه به مسیر حرکت ذره در شکل ۳ می‌باشد، فقط فاصله دایره‌ها کمی بیشتر شده است.

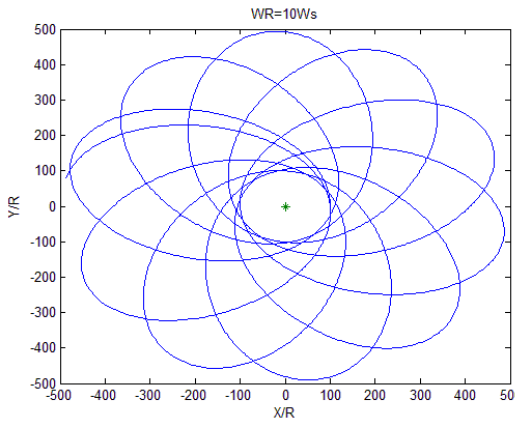


شکل ۴. مسیر حرکت ذره آزمون برای کره ساکن و نوار چرخان.

در شکل‌های ۵ و ۶ مسیر حرکت ذره آزمون برای حالتی که سرعت زاویه‌ای کره و نوار برابر هستند،  $\omega_b = \omega_s$ ، ترسیم شده است. همانطور که از شکل ۵ ملاحظه می‌شود مسیر حرکت ذره آزمون دیگر دایره‌ای نیست، بلکه به شکل بیضی‌های هستند که همگی دارای یک کانون مشترک می‌باشند. اگر سرعت زاویه‌ای تا صد برابر کاهش یابد مسیر حرکت ذره آزمون دیگر بیضوی نیست بلکه مطابق شکل ۶ به صورت دایره فشرده‌ای هستند که مراکز آن‌ها در محدوده کوچکی نزدیک هم قرار دارند.

با مقایسه شکل‌های ۵ و ۶ مشاهده می‌شود که در سرعت زاویه‌های بالا مربوط به سیستم کره و نوار چرخان ( $\omega_b = \omega_s = 2e^{-7} s^{-1}$ ) اثر میدان مغناطوگرانشی روی

مسیر ذره آزمون غالب تر است، اما در سرعت زاویه های پایین ( نیوتنی) بیشتر نمایان است.  $(\omega_b = \omega_s = 2e^{-9} s^{-1})$  اثر میدان الکتروگرانشی (میدان گرانش

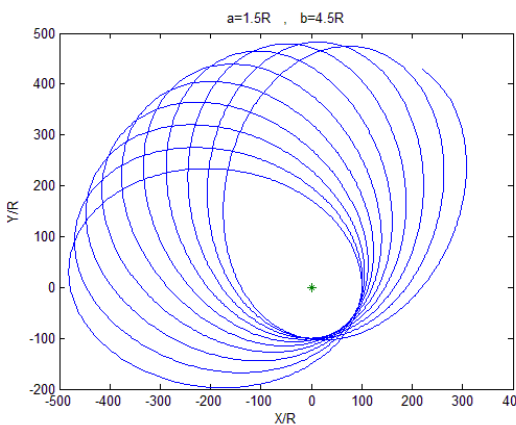


شکل ۷. مسیر حرکت ذره آزمون برای کره و نوار چرخان.

## ۲-۲- حالت دوم

در این بخش شعاع درونی و بیرونی نوار را متغییر و سرعت زاویه ای کره و نوار را ثابت فرض شده است (  $(\omega_b = \omega_s = 2 \times 10^{-8} s^{-1})$  .

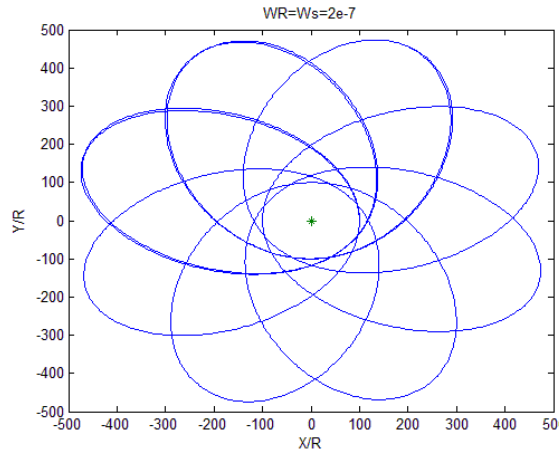
شکل ۸ حالتی را نشان می دهد که در آن شعاع درونی ثابت و یک و نیم برابر شعاع کره (  $a = 1.5R$  ) است اما شعاع خارجی  $4/5$  برابر شعاع کره (  $b = 4.5R$  ) انتخاب شده است. همانطور که از شکل ملاحظه می شود مسیر ذره آزمون بصورت بیضوی است که فقط یک کانون مشترک دارند و کانون دیگر آن بصورت ساعتگرد حول کانون اول می چرخد.



شکل ۸. مسیر حرکت ذره آزمون برای کره و نوار چرخان.

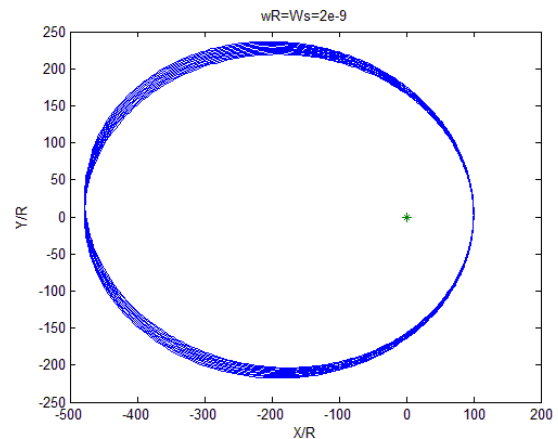
$$a = 1.5R, b = 4.5R$$

در شکل ۹ حالتی دیگری بررسی شده که در آن شعاع بیرونی نوار افزایش چشمگیری داشته یعنی به  $6/5$  برابر شعاع کره رسیده است. مسیر حرکت ذره آزمون در این حالت شبیه



شکل ۵. مسیر حرکت ذره آزمون برای کره و نوار چرخان.

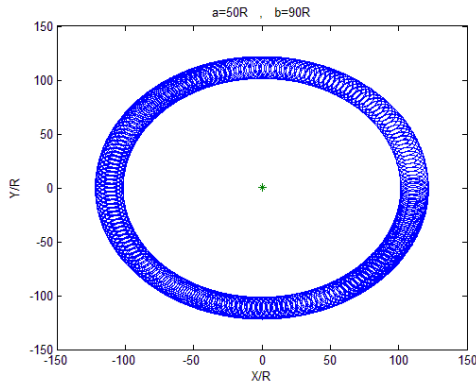
$$\omega_b = \omega_s = 2e^{-7} s^{-1}$$



شکل ۶. مسیر حرکت ذره آزمون برای کره و نوار چرخان.

$$\omega_s = \omega_b = 2e^{-9} s^{-1}$$

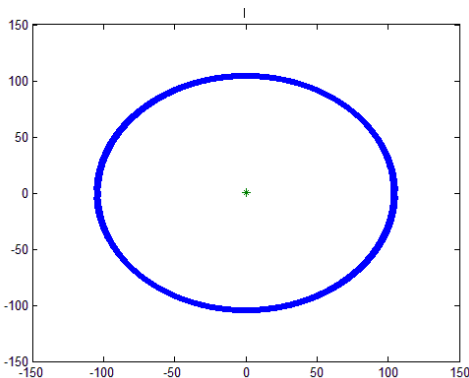
مسیر حرکت ذره آزمون در شکل ۷ برای حالتی که سرعت زاویه ای نوار ده برابر سرعت زاویه ای کره باشد (  $\omega_b = 10\omega_s$  )، ترسیم شده است. همانطور که از شکل ۷ قابل ملاحظه است، ذره آزمون روی مسیرهای بیضوی با مرکزهای متفاوت حرکت می کند، به عبارت دیگر، ذره هر بار یک مسیر متفاوتی از مسیر قبلی برای حرکت انتخاب می کند در واقع کره و نوار در یکی از کانون های این بیضوی ها قرار دارند، که کاملاً متفاوت از شکل های فوق می باشد.



شکل ۱۱. مسیر حرکت ذره آزمون برای  $a = 50R, b = 90R$

## ۲-۲- اثرات مغناطوگرانش سیاره زحل مانند

موردی که بعنوان مثال در این مقاله بررسی شد، سیاره زحل مانند می‌باشد. این سیاره با حلقه‌های زیبایش خیلی شبیه به سیستم کره چرخان و نوار چرخان است، به همین دلیل مسیر حرکت ذره‌ی آزمون جرم‌دار در میدان مغناطوگرانشی آن بررسی و ترسیم شده است. همچنین پارامترهای مربوط به آن در جدول ۲ ارائه شده است. جرم حلقه‌های زحل مانند یک دهم جرم سیاره در نظر گرفته شده و همچنین فرض شده نوارهای آن با سرعت زاویه‌ای برابر با سرعت زاویه‌ای سیاره در حال گردش به دور آن باشند. شعاع درونی نوار مورد نظر  $71200 \text{ km}$  (  $R_{in} = 71200 \text{ km}$  ) و شعاع بیرونی آن  $353200 \text{ km}$  (  $R_{out} = 353200 \text{ km}$  ) است. تحت این شرایط مسیر حرکت ذره آزمون در میدان مغناطوگرانشی زحل مانند به صورت شکل ۱۴ می‌باشد.

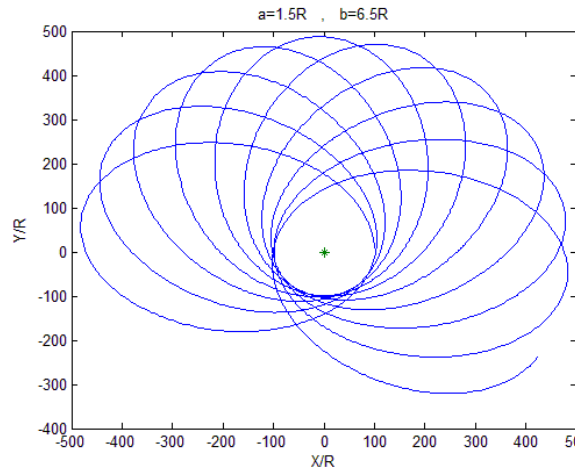


شکل ۱۴. مسیر حرکت ذره آزمون برای زحل

$$\omega_s = 1.7 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$$

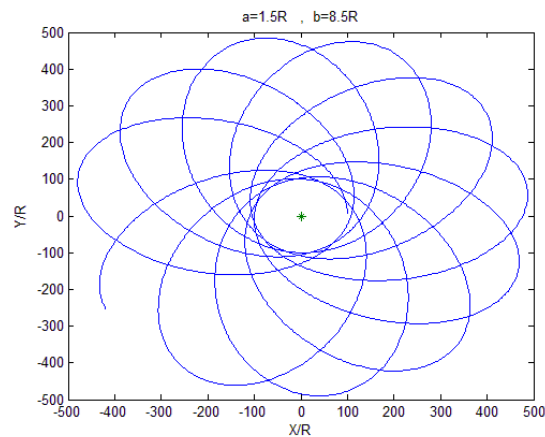
یکی از مسیرهای جالب توجه برای ذره آزمون حالتی است که در آن مقادیر سرعت زاویه‌ای نوار زحل مانند ( $\omega_s$ ) تقریباً

به مسیر حرکت ذره آزمون در شکل ۵ می‌باشد با این تفاوت در اینجا دوایر به هم نزدیکتر هستند.



شکل ۹. مسیر حرکت ذره آزمون برای  $a = 1.5R, b = 6.5R$

با افزایش شعاع بیرونی نوار تا  $8/5$  برابر شعاع کره، همانطور که از شکل ۱۰ مشاهده می‌شود مسیر حرکت ذره آزمون بیضوی و در مقایسه با شکل ۹، شکل بیضی‌ها پهن تر و فاصله آنها از هم بیشتر شده است. همچنین مسیر حرکت ذره آزمون بصورت باز می‌باشد.



شکل ۱۰. مسیر حرکت ذره آزمون برای  $a = 1.5R, b = 8.5R$

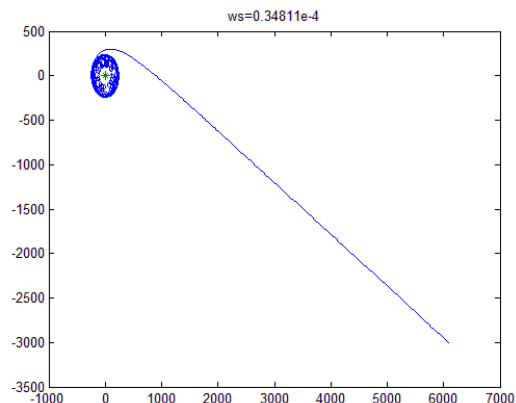
برای اینکه تغییرات شعاع نوار روی مسیر حرکت ذره آزمون محسوس تر باشد در این قسمت شعاع داخلی و خارجی نوار را در مقایسه با موارد قبل خیلی بزرگ انتخاب شده است. به عبارت دیگر شعاع بیرونی نوار را تا ۹۰ برابر ( $b = 90R$ ) و شعاع داخلی را تا ۵۰ برابر ( $a = 50R$ ) شعاع کره افزایش پیدا کرده است. همانطور که از شکل ۱۱ مشاهده می‌شود مسیر حرکت ذره آزمون بصورت دوایر کوچکی می‌باشد که مراکز آنها روی محیط دایره بزرگتری قرار دارد. با مقایسه این مسیر حرکت، با مسیرهای دیگر حرکت ذره آزمون تفاوت‌های زیادی مشاهده می‌شود.

افزایش شعاع بیرونی نوار چرخان نیز می‌تواند الگوی مسیر حرکت ذرهٔ آزمون را تغییر دهد.

### منابع

- [1] G. Holzmuller, Z. Math. Phys. 15, 69 (1870).
- [2] F. Tisserand, Compt. Rend. 75, 760 (1872); 110, 313 (1890).
- [3] W. de Sitter, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 76, 699 (1916). doi.org/10.1093/mnras/76.9.699
- [4] B. Mashhoon, F. W. Hehl, D. S. Theiss, On the gravitational effects of rotating masses, General Relativity and Gravitation, Volume 16, Issue 8, pp.711-750, (1984) ;doi: 10.1007/BF00762913,
- [5] I. Ciufolini, Class. Quantum Grav. 17, 2369 (2000). Book.
- [6] T. Toth, Viktor , Gravitoelectromagnetism and stellar orbits in galaxies, WSPC/Instruction File,(2021).  
[doi.org/10.48550/arXiv.2109.00357](https://doi.org/10.48550/arXiv.2109.00357)
- [7] S. Capozziello, M De Laurentis, F. Garufi, L. Milano, Relativistic orbits with gravitomagnetic corrections, (2009)  
[doi:10.1088/0031-8949/79/02/025901](https://doi.org/10.1088/0031-8949/79/02/025901)
- [8] F Garufi, S. Capozziello, M. De Laurentis, L. Forte, L. Milano, Relativistic orbits and Gravitational Waves from gravitomagnetic corrections, (2010).  
[doi:10.1088/1742-6596/228/1/012052](https://doi.org/10.1088/1742-6596/228/1/012052)
- [9] L. Castaneda, F. Fandino, W. Almonacid, E. Suarez and G. Pinzon, Gravitomagnetic effects of a massive and slowly rotating sphere with an equatorial mass current on orbiting test particles, IUA 261 Symposium Relativity in Fundamental Astronomy 152-154, (2009),  
[doi.org/10.48550/arXiv.0905.4235](https://doi.org/10.48550/arXiv.0905.4235)
- [10] H.Stephani, General Relativity, 2nd end, Cambridge Univercity Press, (1990), Book.
- [11] B. Mashhoon, L. Ioro, and H.I.M. Lichtenegger, Phys. Lett. A 292 (2001). doi:10.1016/S0375-9601(01)00776-9
- [12] A. Barros, V. B. Bezerra and C. Romero, Global Aspect of Gravitomagnetism, Mod. Phys. Lett. A 18 (2003).  
doi:10.1142/S0217732303012143

برابر با مقدار  $0.000348$  انتخاب شود. در این صورت مطابق شکل ۱۵ ذرهٔ آزمون از حوزه گرانشی مرکز جرم خارج می‌شود.



شکل ۱۵. مسیر حرکت ذرهٔ آزمون برای زحل  $\omega_s = 3.48 \times 10^{-5} s^{-1}$

جدول ۲. مشخصات سیاره زحل.

سرعت زاویه ای (rad/s)	شعاع (km)	جرم (kg)
$1.7 \times 10^{-4}$	$6 \times 10^4$	$5.69 \times 10^{26}$

### ۳- نتایج

در این مقاله به بررسی تاثیر میدان گرانشی-مغناطیسی تولید شده توسط یک کره و نوار چرخان بر مسیر یک ذره آزمون پرداخته شده است. این بررسی با استفاده از تقریب میدان ضعیف صورت گرفته، که در آن میدان‌های گرانشی مشابه میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی رفتار می‌کنند و توسط معادلات شبه ماکسولی توصیف می‌شوند. در این تحقیق از تقریب میدان ضعیف برای استخراج معادلات حاکم بر حرکت یک ذره آزمون در میدان گرانشی الکترومغناطیسی (میدان گرانشی-مغناطیسی ناشی از کره و نوارچرخان) استفاده شده است. سپس با استفاده از روش‌های محاسبات عددی و نرم‌افزارهای مربوطه، مسیر حرکت ذره آزمون در شرایط مختلف شبیه‌سازی گردید. نتایج نشان می‌دهد که مسیر حرکت ذره آزمون تحت تاثیر وضعیت کره و نوار (ثابت، چرخش همزمان یا چرخش جداگانه) و همچنین تغییر شعاع نوار قرار دارد. سرعت زاویه‌ای کره و نوار نیز تاثیر قابل توجهی بر مسیر ذره آزمون دارد و الگوهای متفاوتی از مسیر حرکت ذره با تغییر نسبت سرعت‌های زاویه‌ای مشاهده گردید. همچنین ملاحظه گردید که

## Investigation of the effects of the gravitomagnetic field a rotating sphere and band on the trajectory of a test particle

Behrooz Malekolkalami<sup>1</sup>, Abdol Jabbar Shokri\*<sup>2</sup>, Kamel Dwodi<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Department of Physics, Faculty of Science, University of Kurdistan, Sanandaj, Iran

<sup>2</sup>Department of Physics, Faculty of Science, University of Payame Noor, Tehran, Iran

### Article details

Received: 2025/09/14

Accepted: 2025/11/19

Published: 2025/12/29

ISSN: 2588-493x

eISSN: 2588-4821

Correspondence email:  
ajshokri1975@pnu.ac.ir



### Abstract

There are several methods for solving Einstein's field equations in gravitational interactions between particles, one of which is the weak field approximation. In this approximation, gravitational fields behave similarly to electric and magnetic fields and are described by equations akin to Maxwell's equations, referred to as quasi-Maxwellian equations in gravity. In electromagnetism, the path of motion of a test particle within these fields can be determined using vector and scalar potentials. This paper employs the weak field approximation to derive the equations governing the motion of a test particle in the electromagnetic gravitational field generated by a sphere and a rotating band. Additionally, numerical calculation methods and appropriate software were utilized to plot the trajectory of the test particle in these fields under various conditions. The results indicated that the path of the test particle is influenced by whether the sphere and band are stationary, rotating together, or rotating separately. Moreover, the angular velocities of the sphere and the ribbon significantly impact the test particle's trajectory. By examining the ratio of the angular velocities of the ribbon and the sphere, different patterns of the test particle's trajectory were observed.

**Keywords:** gravitomagnetic, test particle, modeling, rotating sphere, rotating band.

\*Corresponding Author: ajshokri1975@pnu.ac.ir