ادغام متریک مدل استاندارد کیهان شناسی و متریک استاتیک متقارن کروی

بهروز ملک الکلامی*[۱] ، نالین دو سیلوا [2]

[1] دانشگاه کردستان، دانشکده علوم، گروه فیزیک، سنندج، ایران

[2] دانشگاه کلانیا، دپارتمان ریاضی، کلانیا، سری لانکا

اطلاعات مقاله

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۰۶/۰۷
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۰۹/۰۸
تاریخ چاپ:

شاپای چاپی: 2588-493x
شاپای الکترونیکی:2588-4921

*نویسنده مسئول
B.malakolkalami@uok.ac.ir

چکیده

طبق مشاهدات رصدی، ما در یک عالم در حال انبساط که در مقیاس بزرگ توسط متریک FRW توصیف می شود زندگی می کنیم. از طرف دیگر متریک شوارتسشیلد برای توصیف فضازمان اطراف اجسام متقارن استاتیک کروی در مقیاس های کوچک (محلی) بکار می رود. این متریک مجانبا تخت است، یعنی در فواصل دور (بزرگ مقیاس) به متریک مینکوفسکی تبدیل میشود. در واقع همین شرط مرزی است که متریک استاتیک متقارن کروی را به متریک شوارتسشیلد تبدیل می کند. ولی همان گونه که گفته شد، شرط مرزی واقعی در بزرگ مقیاس، انطباق متریک استاتیک متقارن کروی با متریک FRW است. در این نوشتار با جایگرینی شرط مجانبا تخت با شرط مرزی اخیر، امکان چنین انطباقی مورد بحث قرار گرفته و نشان داده می شود برای هر سه حالت عالم انبساط یابنده FRW (یعنی کروی، تخت و هذلولوی) این امکان وجود دارد.

واژگان کلیدی: متریک FRW، متریک استاتیک متقارن کروی، شرایط مرزی.

مقدمه

بر اساس مشاهدات اختر فیزیکی چند دهه اخیر ما در عالمی همگن و همسانگرد زندگی می‌کنیم که با شتاب نیز در حال انبساط می-باشد. همگنی و همسانگردی مورد بحث در مقیاس فواصل کیهانی (مقیاس بزرگتر از صد مگا پارسکی) معتبر بوده و بر اساس همین دو خاصیت است که عنصر خط (متریک) فضا-زمان عالم بزرگ مقیاس را با متریکی مشهور FRW نمایش می دهند. خاصیت همگنی فضا مستلزم ثابت بودن انحنای گاوسی در هر نقطه از فضا است. این انحنا می‌تواند یکی از سه مقدار ثابت مثبت، منفی و صفر را داشته باشد که معمولا آنها را به ۱ ، ۱ـ و ۰ نرمالیزه می‌کنند. هر کدام از این مقادیر به ترتیب متناظر با عالم های بسته، باز و تخت می‌باشد که از نظر هندسی از آنها به عنوان هندسه کروی، هذلولوی و تخت یاد می‌کنند.

همان گونه که گفته شد متریک فوق در مقیاس‌های کیهانی معتبر است و چون عالم در مقیاس فواصل کوچکتر (کوچک مقیاس) ناهمگن و یا ناهمسانگرد است برای بدست آوردن متریک فضا-زمان باید از خواص کوچک مقیاس یا محلی فضا استفاده کرد. بر طبق معادلات میدان اینشتین یعنی:

$$G_{\alpha\beta} = \kappa\, T_{\alpha\beta}$$

شکل متریک بستگی به توزیع جرم و انرژی دارد که توسط تانسور تکانه-انرژی $T_{\alpha\beta}$ مشخص می‌شود. یکی از رایج ترین و در عین حال ساده ترین حالتها زمانی است که با توزیع جرمی کروی

[Downloaded from jmrph.khu.ac.ir on 2025-01-05]

سر و کار داریم و هدف پیدا کردن جواب‌های معادلات میدان اینشتین در خارج توزیع جرم و در خلا است. خوشبختانه ما در عالمی زندگی می‌کنیم که (در مقیاس‌های محلی) بسیاری از توزیع جرم‌ها علاوه بر داشتن شکل کروی دارای دو ویژگی مهم زیر هستند:

۱- تقارن کروی

۲- مستقل از زمان (ایستا)

بر اساس این دو ویژگی است که متریک‌های موسوم به متقارن کروی استاتیک یکی از مهمترین متریک ها در مباحث گرانشی و اخترفیزیکی محسوب می شوند. یکی از و شاید مشهورترین این جواب‌ها متریک شوارتسشیلد است که متریکی مجانبا تخت است، به این معنی که در فواصل دور از توزیع جرم، این متریک به متریک مینکوفسکی میل می‌کند.

مطلب اخیر شاید کلیدی‌ترین و مهم ترین نکته در ارتباط با نوشتار حاضر است، به این معنی که اگر یک مسئله شرط مرزی شامل یک جسم متقارن کروی استاتیک در عالم واقعی را در نظر بگیریم، خواهیم دید مشکلی در بیان مسئله وجود دارد. برای وضوح بیشتر، مسئله را بصورت زیر بیان می کنیم:

توزیع جرم متقارن کروی ایستا مثلا مانند یک خوشه کروی را در نظر بگیرید که میدان خارج آن توسط متریک شوارتسشیلد داده شده است، بنابراین در فواصل دور از خوشه متریک فضا-زمان به تختی (متریک مینکوفسکی) میل می کند. از آنجاییکه این فواصل دور شامل مقیاس‌های کیهانی نیز می‌شود، آشکارا به این مشکل برخورد می‌کنیم که در فواصل (بزرگ مقیاس) کیهانی باید متریک شوارتسشیلد به متریک مدل استاندارد کیهانشناسی تبدیل شود نه متریک مینکوفسکی. به عبارت دقیقتر متریک نه مجانبا تخت بلکه باید مجانبا FRW باشد.

پس اگر به دنبال توصیفی مناسب تری از عالم در حال انبساط که شامل توزیع جرم‌های متقارن کروی ایستا است باشیم، متریک شوارتسشیلد مجانبا تخت نمی‌تواند توصیف مناسب و درستی از فضا-زمان اطراف این توزیع جرم‌ها را بدست دهد و لذا احتیاج به اصلاح یا تجدید نظر دارد. به عبارت دیگر شرط مجانبا تخت باید با شرط مجانبا FRW جایگزین شود. در نوشتار حاضر این جایگزینی مورد بحث و بررسی قرار گرفته و همچنانکه خواهیم دید امکان این جایگزینی برای هر سه عالم باز، بسته و تخت وجود دارد. به عبارت دیگر امکان تحقق انطباق دو متریک متقارن کروی ایستا و FRW در یک نقطه مرزی وجود دارد.

در اینجا سه مورد زیر را متذکر می شویم:

۱- از دیدگاه دینامیکی ممکن است این مسئله مطرح شود که انبساط عالم در بزرگ مقیاس ممکن است، دینامیک کوچک مقیاس را دستخوش تغییر کند و بنابراین متریک کوچک مقیاس باید مورد بازبینی قرار گیرد. خوشبختانه با پژوهش هایی نظیر [۱] و [۲] این نگرانی ها تا حدود زیادی برطرف شده است.

۲- در ضمن بد نیست به مقالاتی اشاره کنیم که بجای موضوع مقاله حاضر یعنی مسئله جسم متقارن کروی در عالم انبساط یابنده، مسئله ذره مادی در عالم انبساط یابنده را مورد توجه قرار داده اند. خواننده می تواند برای بحث کامل تر به نمونه ای از این مقالات مانند [۳] مراجعه کند. البته مسائلی از این دست به منظور حل و بحث کامل تا دهه های اخیر نیز مورد توجه واقع شده اند. برای مثال می توان به منابع [۶ , ۵ , ۴ , ۲] مراجعه کرد.

۳- دراصل پژوهش حاضر را می توان مرور، توسیع و یا تکمیل موضوع مورد بحث مرجع [۷] است که در آن نویسنده دوم مقاله حاضر و همکار وی بحث ادغام متریکهای FRW و متقارن کروی ایستا را برای حالت FRW تخت ($k=۰$) نشان داده اند.

در پایان این بخش به خلاصه ای از مطالب بخش های بعد اشاره می کنیم:

بخش دوم به معرفی متریک های استاتیک متقارن کروی و متریک استاندارد کیهان شناسی (FRW) اختصاص دارد. دربخش سوم به موضوع اصلی یعنی ادغام دو متریک و شرایط مربوطه پرداخته می شود. نتایج اصلی نیز در بخش چهارم بصورت خلاصه داده شده اند.

۱- متریک های متقارن کروی ایستا و FRW

برای ورود به موضوع، ابتدا جواب‌های متقارن کروی ایستا در خلا معادلات اینشتین ($G_{\alpha\beta}=۰$) را که مقید به شرط تخت مجانبی نیستند بدست می‌آوریم. خوشبختانه چون این محاسبه بجز مرحله اعمال شرط مرزی مذکور عینا مشابه محاسبات متریک شوارتسشیلد است و این محاسبات در اکثر منابع معتبر موجود است، ما فقط به مروری مختصری از آن در زیر خواهیم پرداخت.

برای این منظور کلی‌ترین شکل یک متریک متقارن کروی ایستا را بصورت زیر در نظر می گیریم:

[Downloaded from jmph.khu.ac.ir on 2025-01-05]

$$ds^2 = c^2 e^{\nu(r)} dt^2 - e^{\lambda(r)} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2), \qquad (1)$$

در عبارت فوق از مختصات چهارتایی فضا-زمان (ct, r, θ, ϕ) استفاده شده است.

همچنین در (۱)، c سرعت نور و توابع نمایی ضرایب متریک، فقط تابع مختص شعاعی هستند که با جاگذاری در معادلات خلا انیشتین مشخص می شوند. نتایج این جاگذاری بطور خلاصه عبارتند از:

$$\nu' + \lambda' = 0, \qquad (2)$$

$$e^{\nu(r)} = \frac{B}{1-\frac{2m}{r}}\,, \qquad (3)$$

$$e^{\lambda(r)} = \frac{C}{1-\frac{2m}{r}}\,, \qquad (4)$$

در این معادلات پریم نمایش مشتق نسبت به مختص شعاعی بوده و B, C ثابت هایی مثبت هستند که با استفاده از شرایط مرزی مشخص می شوند.

با انتگرال گیری از معادله (۲) و ترکیب با معادلات (۳) و (۴) به سادگی نتیجه می شود:

$$\nu + \lambda = A,$$

که در آن

$$BC = e^A\,,$$

که A ثابت است.

اگر شرط مرزی تخت مجانبی را بکار ببریم A=۰ می شود و در نتیجه C= B =۱ و متریک شوارتسشیلد بدست می‌آید. ولی الزام ما در اینجا این است که متریک متقارن ایستای کروی (۱) در یک نقطه مرزی باید با متریک مدل استاندارد کیهانی (FRW) زیر منطبق شود:

$$ds^2 = c^2 dT^2 - R^2(T)\left(\frac{du^2}{1-ku^2} + u^2(d\Theta^2 + \sin^2\Theta\, d\Phi^2)\right). \quad (5)$$

در متریک بالا از مختصات کروی (u, Θ, Φ) برای بخش فضایی استفاده شده است که در آن u مختص شعاعی است و در نتیجه مختصات چهارتایی فضا-زمان بصورت $(cT,\, u, \Theta, \Phi)$ می باشد.

همچنین در این متریک ضریب پرانتز بزرگ (R) که فقط تابعی از زمان است را عامل مقیاس می نامند.

در واقع در اینجا شرط مرزی انطباق دو متریک در یک نقطه مرزی (با فاصله مختصاتی) محدود می‌باشد (برخلاف شوارتسشیلد که در بی‌نهایت است). اکنون با توجه به مطالب بیان شده، می توان به بحث ادغام دو متریک پرداخت که در بخش بعدی انجام می شود.

۲- ادغام متریک های متقارن کروی ایستا و *FRW*

منظور از ادغام دو متریک، پیوند (یا برابری) دو متریک در یک نقطه مشترک است که ما آنرا نقطه مرزی مینامیم. بنابراین برای اعمال شرایط مرزی، باید ضرایب دو متریک در نقطه مرزی برابر شوند، ولی خوشبختانه تقارن کروی سبب می شود بتوان بدون کاستن از کلیت موضوع، مختصات زاویه ای دو متریک را با هم برابر گرفت، یعنی: $(\Theta=\theta,\, \Phi=\phi)$. از اینرو با برابر قرار دادن ضرائب دو متریک (۱) و (۵) با استفاده از (۳) و (۴) به سه رابط زیر می رسیم:

$$\sqrt{B\left(1-\frac{2m}{r}\right)}\; c\delta t = c\delta T, \qquad (6)$$

$$\sqrt{\frac{C}{1-\frac{2m}{r}}}\,\delta r = R\,\frac{\delta u}{\sqrt{1-ku^2}}\,, \qquad (7)$$

$$r = Ru, \qquad (8)$$

که با گرفتن دیفرانسیل از دو طرف معادله (۸) نیز خواهیم داشت:

$$\delta r = u\,\delta R + R\,\delta u. \qquad (9)$$

اکنون برای استفاده از معادلات بالا به این نکته مهم اشاره می‌کنیم که ادغام دو متریک باید برای هر لحظه از زمان باید صادق

[Downloaded from jmrph.khu.ac.ir on 2025-01-05]

باشد و بنابراین با در نظر گرفتن یک لحظه زمانی دلخواه (و ثابت) می توان فرض $\delta t = ۰$ را بر معادلات بالا افزود و بنابراین از معادله (۶) خواهیم داشت $\delta T = ۰$. از طرفی چون عامل مقیاس فقط تابع زمان است، در نتیجه

$$\delta R = \frac{dR}{dT}\delta T = 0.$$

با بردن این نتیجه درمعادله (۹) خواهیم داشت:

$$\delta r = R\,\delta u.$$

با بردن نتیجه بالا در معادله (۷) ساده سازی بدست می آوریم :

$$\sqrt{\frac{C}{1-\frac{2m}{r}}} = \frac{1}{\sqrt{1-ku^2}},$$

و سرانجام با قرار دادن معادله (۸) در معادله اخیر و انجام عملیات جبری مختصر به معادله اساسی و مطلوب خود می رسیم:

$$kCr^3 + (1-C)R^2 r - 2mR^2 = 0. \quad (۱۰)$$

این معادله در حالت کلی، یک معادله جبری درجه سوم بر حسب r مختص است و بسته به مقادیر و علامت ضرایب معادله، می‌تواند سه ریشه داشته باشد (بحث کامل تجزیه و تحلیل جوابهای معادله درجه سوم در منابع ریاضی مربوطه موجود است). ولی در اینجا و برای مسئله ما وجود یک ریشه حقیقی مثبت که شرایط فیزیکی را نقض نکند کفایت می کند. به یاد داشته باشیم که این ریشه حقیقی مثبت همان نقطه پیوند دو متریک است. ضریب k موجود در معادله مربوط به متریک مدل استاندارد است که جهان‌های باز، بسته و تخت را توصیف می‌کند و از آنجاییکه می-خواهیم وجود نقطه پیوند را برای هر سه جهان نشان دهیم، وجود ریشه‌های معادله درجه سه را برای هر سه مقدار پارامتر انحنا در زیر بررسی می‌کنیم.

ابتدا معادله را برای جهان تخت یعنی $k=۰$ در نظر می گیریم. در این حالت معادله تبدیل به معادله‌ای درجه یک شده و فقط دارای یک ریشه حقیقی مثبت بصورت

$$r = r_0 = \frac{2m}{1-C},$$

که با توجه به معادله (۸) مختص شعاعی متریک استاندارد مقدار زیر را خواهد داشت:

$$u = u_0 = \frac{2m}{(1-C)R}.$$

به یاد داشته باشیم که $C>۰$ و حالت $C=۱$ متناظر با شوارتسشیلد است، ولی در اینجا شرط ریشه حقیقی مثبت منجر به $C<۱$ شده و بنابراین مقدار این ثابت در بازه صفر و یک قرار می‌گیرد و ادغام دو متریک در این بازه امکان‌پذیر است. بدیهی است که شرط $C<۱$ باعث می‌شود که مختص شعاعی ادغام بزرگتر از شعاع شوارتسشیلد ($۲m$) جسم کروی شود.

اکنون معادله (۱۰) را برای حالت $k\neq۰$ در نظر می گیریم. در این حالت از مباحث مربوط به معادلات درجه سوم می دانیم که ریشه های این معادله بستگی به علامت کمیت زیر دارد:

$$\Delta = \frac{4m^2R^4}{k^2C^2} + \frac{4(1-C)^3R^6}{27k^3C^3}, \qquad (11)$$

این کمیت که آنرا دلتای معادله می‌نامند، شرایط وجود ریشه های معادله را به سه صورت زیر بیان می کند:

۱) اگر $\Delta>۰$، آنگاه معادله دارای یک ریشه حقیقی و دو ریشه مختلط متمایز است.

۲) اگر $\Delta=۰$، آنگاه معادله دارای سه ریشه حقیقی است که حداقل یا دو تا از آنها برابرند و یا در صورت وجود ریشه سوم، این ریشه برابر و منفی آن دو ریشه است.

۳) اگر $\Delta<۰$، آنگاه معادله دارای سه ریشه حقیقی متمایز است.

همانگونه که ملاحظه می شود، برای هر سه حالت همواره (بطور حداقلی) یک ریشه حقیقی وجود دارد و از آنجایی که ما برای ادغام دو متریک تنها به یک جواب حقیقی مثبت نیاز داریم، خواهیم دید که همواره می توان یک ریشه حقیقی مثبت را اختیار کرد. برای اینکار کافیست از سه حالت فوق، ساده ترین حالت یعنی حالت دوم ($\Delta=۰$) را در نظر بگیریم. برای $k=۱$ معادله (۱۱) چنین می شود:

$$\frac{4m^2R^4}{C^2} = \frac{4(C-1)^3R^6}{27C^3}, \qquad (12)$$

که مستلزم $C>۱$ است. در این حالت بر اساس بند ۲ که در بالا و در مورد تعداد و چگونگی ریشه های معادله درجه شوم بیان گردید ، معادله (۱۰) فقط دارای دو ریشه حقیقی مثبت و منفی خواهد بود که با کنار گذاشتن ریشه منفی، ریشه مثبت معادله را به صورت زیر بدست می آید:

[Downloaded from jmrph.khu.ac.ir on 2025-01-05]

$$r = r_c = 2\,m\left(\frac{R^2}{Cm^2}\right)^{1/3} = \frac{6m}{C-1}\,,$$

که در ساده سازی آخرین تساوی از (۱۲) استفاده شده است.

با انجام عملیات مشابه برای $k=-1$ به

$$\frac{4m^2R^4}{C^2} = -\frac{4(C-1)^3R^6}{7C^3}, \qquad (13)$$

می رسیم که مستلزم $C<1$ است و پس از ساده سازی ریشه به صورت

$$r = r_c = \frac{6m}{1-C}\,,$$

در می آید.

پس همانگونه که مشاهده می شود در هر سه حالت متریک FRW (هر سه حالت مقدار k) امکان ادغام با ایجاد محدودیت بر روی ثابت C امکانپذیر است و مختص شعاعی نقطه ادغام به این ثابت و جرم مرکزی وابسته است و همانطور که انتظار می رود، مختص شعاعی ادغام در مختصات شوارتسشیلد مستقل از زمان و در مختصات FRW بر طبق فرمول $u=r/R$ وابسته به زمان است.

۳- نتیجه گیری و بحث

انگیزه اصلی در ارایه نوشتار حاضر، از وجود شرایطی واقعی در جهان فیزیکی که بر اساس مدلهای نسبیت عام توصیف شده است، ناشی می شود. اینجا صحبت از دو مدل نسبیت عام برای توصیف عالم، یکی در کوچک مقیاس (شوارتسشیلد) و دیگری در بزرگ مقیاس یعنی جهان انبساط یابنده (FRW) است.

همانطور که می دانیم اصل همگنی و همسانگردی در مقیاس بزرگتر از صد مگا پارسکی برقرار است و متریک شوارتسشیلد متریکی مجانبا تخت (مینکوفسکی) است، در صورتی که شرایط واقعی در جهان فیزیکی را بر اساس مشاهدات رصدی می توان به صورت زیر بیان کرد:

هنگامی که از یک توزیع متقارن کروی (در کوچک مقیاس) به اندازه کافی دور می شویم بجای یک فضا-زمان تخت، در یک جهان انبساط یابنده (FRW) قرار می گیریم، پس متریک مجانبا تخت شوارتسشیلد نمی تواند توصیف دقیقی از عالم واقعی را بدست دهد. بر این اساس باید یک جواب متقارن ایستای کروی دیگر جایگزین جواب شوارتسشیلد شود و هندسه توصیف کننده جواب جایگزین و جواب (FRW) در نقطه ای قابل ادغام باشند.

برای رفع این مشکل باید جواب های ایستای متقارن کروی با شرط مجانبا تخت را با شرط مجانبا (FRW) جایگزین کرد. در این نوشتار نشان داده شد، با جایگرینی این شرط، ادغام دو متریک امکان پذیر شده و توصیف مناسب تری از عالم واقعی را بدست می دهد. در ضمن نشان داده می شود، امکان ادغام در هر سه حالت جهان انبساط یابنده وجود دارد.

منابع

[1] A. Einstein and E. G. Straus, ‘’ The Influence of the Expansion of Space on the Gravitation Fields Surrounding the Individual Stars,’’ *Rev. Mod. Phys.*, vol. 17, no. 2, 1945.

[2] M. Carrera and D. Giulini, “Influence of global cosmological expansion on local dynamics and kinematics,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 82, no. 169, 2010.

[3] G. C. McVittie, “The mass-particle in an expanding universe,” *Mon. Not. R. Astr. Soc.*, vol. 93, no. 325, 1933.

[4] B. C. Nolan, “A point mass in an isotropic universe: Existence, uniqueness, and basic properties,” *Phys.Rev. D*, vol. 58, no. 064006, 1998.

[5] B. C. Nolan, “A point mass in an isotropic universe: III. The region R ≤ 2m,” *lass.Quant.Grav.*, vol.16, no. 3191, 1999.

[6] I. D. Karachentsev, “The Local Group and Other Neighboring Galaxy Groups,” *The Astronomical Journal*, vol. 129, no. 178, 2005.

[Downloaded from jmrph.khu.ac.ir on 2025-01-05]

[7] B. Senevirathne and N. de Silva, “The Merger of the Schwarzschild metric and the Robertson-Walker metric,” *arXiv*: 0812.3740v2.

[Downloaded from jmrph.khu.ac.ir on 2025-01-05]

JMRPh. (8)(1): 1-7, Spring and Summer,2024

The Merger of Robertson-Walker and Schwarzschild Type Metrics

[1] Behrooz Malekolkalami, [2] Nalin de Silva

[1*] University of Kurdistan, Sanandaj, Kurdistan, Iran

[2] University of Kelaniya, Kelaniya, Sri Lanka

Article details

Received: 2024/08/28
Accepted: 2024/11/28
Published:

ISSN: 2588-493x
eSSN: 2588-4821

Correspondence email:
B.malakolkalami@uok.ac.ir

Abstract

Due to the (large scale) expansion of the universe on the one hand and the the local spherical symmetry (short scale) in the universe, the conformity discourse of adapting the geometry of these two universes (at a radial point) can have strong motivation. These two geometry are represented by the Robertson - Walker (FRW) and Schwarzschild type metrics. Here, we are going to do such an adaptation (merging) of the metrics. It is shown that the merger is possible for three geometry of the expanding universe.

Keywords: FRW metric, schwarzschild type metric, boundary conditions

[Downloaded from jmrph.khu.ac.ir on 2025-01-05]