حالت های همدوس تعمیم یافته و فوتون افزوده باروت- جیراردلو برای نوسانگرهماهنگ غیرخطی

سودابه رضایی[1]*؛ اردشیر رابعی[1]

[1]**دانشگاه رازی،گروه فیزیک، کرمانشاه**

اطلاعات مقاله

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۹/۱۷
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۱۱/۱۳
تاریخ چاپ: ۱۴۰۳/۱۱/۲۷

شاپای چاپی: 2588-493x
شاپای الکترونیکی: 2588-4921

* نویسنده مسئول
sodaber9@gmail.com

چکیده

هدف ما در این مقاله، مطالعه *نوسانگر غیرخطی به عنوان نمونه ای از یک سیستم با جرم موثر وابسته به موقعیت* از نقطه نظر حالت های همدوس تعمیم یافته و حالت های همدوس فوتون افزوده با فرمولبندی باروت- جیراردلو می باشد. تحلیل رابطه همانی، به عنوان مهمترین ویژگی حالت های همدوس ، بر اساس تابع میجر انجام می شود. همچنین ویژگی های غیرکلاسیکی این دو بردار حالت سیستم را با استفاده از تابع توزیع احتمال و پارامتر مندل بررسی می نماییم.

واژگان کلیدی: حالت های همدوس باروت -جیراردلو، حالت های همدوس فوتون افزوده ، ویژگی های غیر کلاسیکی، تابع توزیع احتمال، پارامتر مندل

مقدمه

مفهوم حالت های همدوس به صورت موفقیت آمیزی در دهه های اخیر در زمینه های مختلف فیزیک نظری وآزمایشگاهی، به ویژه اپتیک کوانتومی، به کار رفته است. این حالت ها ابتدا در رابطه با نوسانگر هماهنگ ساده کوانتومی، با جبر ویل - هایزنبرگ، توسط شرودینگر معرفی شدند طوری که از نظر دینامیکی رفتاری نزدیک به دینامیک کلاسیک را دارا بوده و رابطه عدم قطعیت مینیمم را برآورده می نمودند[1]. در دهه شصت گلوبر حالت های معرفی شده توسط شرودینگر را حالت همدوس نامید و نشان داد که آنها برای توصیف یک نور لیزر همدوس کافی می باشند.

سه روش نظریه گروهی متفاوت برای تعیین حالت های همدوس وجود دارد که از سه تعریف مشهور گلوبر برای حالت های همدوس [3]مربوط به نوسانگر هماهنگ ساده پیروی می کنند. پریلیموو و گیلمور و راسه تی فرمولبندی حالت های همدوس را به صورتی که آنها از عمل نمایش گروه روی یک حالت پایه به دست می آیند و توسط نقاطی در فضای همگن پارامتریزه می شوند، ارائه داده اند[4]. این روش تعیین حالت های همدوس برای هر گروه لی قابل استفاده می باشد.

در روش دوم،که فقط در مورد گروه های غیرفشرده کاربردی است، حالت های همدوس ویژه بردار عملگر نابودی می باشندکه حالت های همدوس باروت -جیراردلو نام دارند[5].

تعریف سوم که به برآورده نمودن رابطه عدم قطعیت می نیمم برای عملگرهای هرمیتی بر می گردد، حالت های همدوس هوشمند نامگذاری می شوند. این سه روش تعیین حالت های همدوس، فقط در مورد خاص گروه ویل- هایزنبرگ (گروه تقارن دینامیکی نوسانگر ساده) با هم معادلند.

در بیشتر مباحث فیزیکی نوسانگر هماهنگ ساده به خوبی مورد مطالعه قرار گرفته است. این سیستم نقش مهمی در توصیف آرمان گرایانه روی بسیاری از مسائل فیزیکی مثل نظریه کوانتومی نور لیزر، الکترودینامیک کوانتومی و نوسانات کوچک روی مولکول های چند اتمی ایفا نموده است. از طرفی بسیاری از پدیده های فیزیکی در طبیعت نوساناتی غیرخطی را نشان می دهند. همین امر محققان را به بررسی نوسانگر های غیر خطی تشویق نموده است. برای مثال ماتیو و لانشمن در سال ۱۹۷۴ معادله

$$m[(1+\lambda x^2)\ddot{x}-\lambda x\dot{x}^2+\alpha^2 x]=0, \qquad (۱)$$

را به عنوان نمونه ای ازسیستم هایی که نوسانات غیرخطی را توصیف می نمایند، مطالعه نمودند[6]. آنها نشان دادند که معادله (۱) دارای جوابی عام به صورت $x=A\sin(\omega t+\phi)$ با $\omega=(\alpha^2/(1+\lambda A^2))^{\frac{1}{2}}$ می باشد که بیانگر وابستگی فرکانس به دامنه است. هامیلتونی کلاسیکی سیستم مذکور به صورت زیر نوشته می شود:

$$H=\frac{(1+\lambda x^2)p^2}{2m}+\frac{m\omega^2 x^2}{2(1+\lambda x^2)}, \qquad (۲)$$

که بیانگر هامیلتونی نوسانگر هماهنگ غیرخطی با جرم موثر وابسته به موقعیت $m(x)=1/(1+\lambda x^2)$ می باشد و در حد $\lambda\to 0$ به نوسانگر هماهنگ با جرم واحد تبدیل می شود. پارامتر غیرخطی λ می تواند مقادیر مثبت ، منفی و صفر را اختیار کند. واضح است که نوسانگر غیرخطی مربوطه در مورد $\lambda<0$ یک تکینگی را در $1-|\lambda|x^2=0$ تجربه می نماید. بنابراین آنالیز ما در این حالت، در محدوده $-1/\sqrt{|\lambda|}<x<1/\sqrt{|\lambda|}$ خواهد بود[7].

هدف ما در این کار بررسی نوسانگر غیر خطی با جرم موثر وابسته به موقعیت در مورد $\tilde{\lambda}=\lambda/\alpha<0$ (پارامتری بدون بعد) از منظر حالت های همدوس باروت جیراردلو می باشد. بدین منظور در بخش اول ارتباط این سیستم را با گروه غیر فشرده $SU(1,1)$ بیان می نماییم. تعیین حالت های همدوس باروت - جیراردلو و بررسی خواص آن را در بخش دوم دنبال می کنیم. اضافه کردن فوتون از حالت های همدوس گلوبر موضوعی است که به صورت گسترده در چارچوب تئوری و آزمایشگاهی مورد مطالعه قرار گرفته است[8]. این حالت ها ابتدا توسط اگروال و تارا با عنوان حالت های همدوس افزوده در رابطه با حالت های همدوس گلوبر معرفی شدند[9]. بعد ها توجه محققان زیادی را در زمینه اپتیک کوانتومی، به منظور بررسی خواص آماری آنها مانند پارامتر مندل، به دنبال داشت. این حالت ها از اثر متوالی عملگر آفرینش بر روی کت حالت های همدوس تعیین می شوند. بر این اساس در ادامه حالت های همدوس فوتون افزوده باروت - جیراردلو را برای سیستم مورد مطالعه، ارائه می دهیم. در پایان به بررسی خواص آماری این دو نوع حالت همدوس از منظر تابع توزیع احتمال و پارامتر مندل می پردازیم.

۱- نگاهی کوتاه به نوسانگر غیرخطی کوانتومی وگروه تقارن دینامیکی مربوطه

همتای کوانتومی هامیلتونی در رابطه (۲) به صورت زیر می باشد:

$$\hat{H}=\frac{1}{2}[(1+\tilde{\lambda}\hat{x}^2)\hat{p}^2-2i\tilde{\lambda}\hat{x}\hat{p}+\frac{\alpha^2 x^2}{1+\tilde{\lambda}x^2}].$$

ویژه توابع و ویژه مقادیر وابسته به این سیستم توسط روابط زیر تعیین می شوند([11] و[7]):

$$\tilde{\lambda}<0:\begin{cases}\psi_n(y,\tilde{\lambda})=H_n(y,\tilde{\lambda})(1-|\tilde{\lambda}|)^{-\frac{1}{2|\tilde{\lambda}|}},\\ E_n=\left(n+\dfrac{1}{2}+|\tilde{\lambda}|\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]\right), n=0,1,2,\ldots\end{cases}$$

$$\tilde{\lambda}>0:\begin{cases}\psi_n(y,\tilde{\lambda})=H_n(y,\tilde{\lambda})(1+\tilde{\lambda})^{-\frac{1}{2\tilde{\lambda}}},\\ E_n=\left(n+\dfrac{1}{2}-\tilde{\lambda}\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]\right), n=0,1,2,\ldots,n_{\max},\end{cases}$$

که H_n چندجمله ای های هرمیتی وابسته به $\tilde{\lambda}$ و $y=\sqrt{\alpha x}$ می باشد.

محدودیت در مقادیر n برای مورد $\tilde{\lambda}>0$ ، ناشی از شرط همگرایی ویژه توابع در بی نهایت می باشد. هدف ما دراین کار بررسی نوسانگرغیر خطی مذکور برای مورد $\tilde{\lambda}<0$ می باشد. یک روش قدرتمند در تعیین عملگرهای آفرینش و نابودی روش فاکتوریزاسیون می باشد. بر این اساس نایلا در مرجع [7] با تکیه بر مفاهیم ابرتقارن و ناوردای شکل، اثر عملگر های آفرینش و نابودی را در فضای فوک برای مورد $\tilde{\lambda}<0$ به صورت زیر تعیین نموده است:

$$\hat{A}^{+}|n\rangle=\sqrt{(n+1)(1+\frac{|\tilde{\lambda}|}{2}(n+2)}\ |n+1\rangle, \tag{۳}$$

$$\hat{A}^{-}|n\rangle=\sqrt{n(1+\frac{|\tilde{\lambda}|}{2}(n+1)}\ |n-1\rangle, \tag{۴}$$

با بازنویسی عملگر های نردبانی بالا به صورت زیر:

$$\hat{A}^{+}|n\rangle=\sqrt{\frac{|\tilde{\lambda}|}{2}}\sqrt{(n+1)(\frac{2}{|\tilde{\lambda}|}+n+2)}\ |n+1\rangle,$$

$$\hat{A}^{-}|n\rangle=\sqrt{\frac{|\tilde{\lambda}|}{2}}\sqrt{n(\frac{2}{|\tilde{\lambda}|}+n+1)}\ |n-1\rangle,$$

و مقایسه آن ها با عملگر های نردبانی گروه $SU(1,1)$، در مرجع [12]، می توان نوشت:

$$\hat{A}^{\pm}=\sqrt{\frac{|\tilde{\lambda}|}{2}}\hat{K}^{\pm}\Bigg|_{k=1+\frac{1}{|\tilde{\lambda}|}}, \tag{۵}$$

که $\hat{K}^{\pm}$ عملگر های نردبانی وابسته به گروه $SU(1,1)$ و $k=1,3/2,2,\ldots$ مشخصه نمایش های کاهش ناپذیر سری گسسته این گروه می باشد. واضح است که عملگر های آفرینش و نابودی در رابطه (۶) جبر گروه $SU(1,1)$ برای حالت ویژه $k=1+1/|\tilde{\lambda}|$ را تشکیل می دهند.

۲- حالت های همدوس باروت - جیراردلو

حالت های همدوس باروت -جیراردلو مربوط به یک سیستم کوانتومی، به صورت ویژه بردار عملگر نابودی مربوط به آن تعریف می شوند. برای نوسانگر غیرخطی با جرم موثر وابسته به موقعیت می توان نوشت:

$$\hat{A}^{-}|z,k\rangle=z|z,k\rangle, \tag{۶}$$

که $|z,k\rangle$ حالت های همدوس باروت-جیراردلو و z پارامتری مختلط می باشند. با انتخاب کت حالت همدوس به صورت بر هم نهی از ویژه توابع

$$|z,k\rangle=\sum_n C_n|n\rangle, \tag{۷}$$

و استفاده از عمل عملگر نابودی در رابطه (۵) می توان رابطه بازگشتی زیر را به دست آورد:

$$C_n=\frac{z}{\sqrt{n(1+\frac{|\tilde{\lambda}|}{2}(\mathrm{n}+1))}}C_{n-1}. \tag{۸}$$

با اندکی محاسبه و استفاده از تعریف تابع گاما [1] به راحتی می توان نوشت:

$$C_n=\frac{z^n}{(\frac{|\tilde{\lambda}|}{2})^{\frac{n}{2}}}\sqrt{\frac{\Gamma(2+\frac{2}{|\tilde{\lambda}|})}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+2+\frac{2}{|\tilde{\lambda}|})}}\ C_0.$$

[1] Gamma function

بر این اساس حالت های همدوس باروت- جبراردلو برای نوسانگر غیرخطی به صورت زیر تعیین می شوند:

$$|z,k\rangle=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(\frac{|\tilde{\lambda}|}{2})^{\frac{n}{2}}}\sqrt{\frac{\Gamma(2+\frac{2}{|\tilde{\lambda}|})}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+2+\frac{2}{|\tilde{\lambda}|})}}\;C_0|n\rangle, \qquad (۱۰)$$

که

$$\frac{1}{|C_0|^2}=N(|z|^2)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|z|^{2n}}{(\frac{|\tilde{\lambda}|}{2})^n}\frac{\Gamma(2+\frac{2}{|\tilde{\lambda}|})}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+2+\frac{2}{|\tilde{\lambda}|})}. \qquad (۱۱)$$

از شرط بهنجارش روی حالت های همدوس یعنی $\langle z,k|z,k\rangle=1$ تعیین می شود. این ضریب را می توان برحسب تابع فوق هندسی[2] به صورت زیر نوشت:

$$N(|z|^2)={}_0F_1([],2+\frac{2}{|\tilde{\lambda}|},2\frac{|z|^2}{|\tilde{\lambda}|}).$$

بر این اساس می توان حالت های همدوس در رابطه (۱۰) را به صورت زیر بازنویسی نمود:

$$|z,k\rangle=\frac{1}{\sqrt{N(|z|^2)}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z'}{\sqrt{\rho(n)}}|n\rangle, \qquad (۱۲)$$

که $z'=\sqrt{\frac{2}{\tilde{\lambda}}}z$ و

$$\rho(n)=\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(n+2+\frac{2}{|\tilde{\lambda}|})}{\Gamma(2+\frac{2}{|\tilde{\lambda}|})}. \qquad (۱۳)$$

می توان نشان داد، شعاع همگرایی برای حالت های همدوس مذکور که به صورت $R=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\rho(n)}$ می باشد، بی نهایت خواهد بود. همچنین همه روابط بالا در مورد نوسانگر غیرخطی در حد $\tilde{\lambda}\to 0$ بر روابط مشابه در مورد نوسانگر هماهنگ ساده کوانتومی منطبق می شود(اثبات در پیوست) یعنی:

$$\lim_{\tilde{\lambda}\to 0}N(|z|^2)\equiv e^{|z|^2},$$

$$\lim_{\tilde{\lambda}\to 0}|z,k\rangle\equiv|z>=e^{-\frac{|z|^2}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle.$$

مهمترین ویژگی حالت های همدوس یعنی برقراری رابطه همانی به صورت زیر :

$$\int|z,k\rangle\langle z,k|\mu(d^2z)=\hat{I}=\sum_{n=0}^{\infty}|n\rangle\langle n|, \qquad (۱۴)$$

می باشد که در واقع پل ارتباطی بین جهان کوانتوم و جهان کلاسیک است. در این رابطه

$$\mu(d^2z)=N(|z|^2)\omega_k(|z|^2)\frac{d^2z}{\pi}, \qquad (۱۵)$$

می باشد و $\omega_k(|z|^2)$ تابع وزن مثبتی است که باید تعیین شود. به این منظور با قرار دادن حالت همدوس معرفی شده در رابطه (۱۲) خواهیم داشت:

$$\int|z|^{2n}\,\omega_k(|z|^2)\frac{d^2z}{\pi}=\rho(n). \qquad (۱۶)$$

با توجه به اینکه در نمایش قطبی داریم:

$$z=re^{i\phi},\qquad d^2z=rdrd\phi,$$

با تغییر متغیر $x=r^2$ رابطه بالا به صورت رابطه انتگرالی زیر به دست می آید:

$$\int_0^{\infty}x^n\omega(x)dx=\rho(n). \qquad (۱۷)$$

تابع وزن $\omega(x)$ با استفاده از بحث تبدیل میلین و تابع G میجر (که در پیوست آمده است) به صورت زیر تعیین می شود:

$$\omega_k(x)=\frac{G_{02}^{20}\left(\frac{2x}{|\tilde{\lambda}|}\middle|\;0,2+\frac{2}{|\tilde{\lambda}|}\right)}{\frac{|\tilde{\lambda}|}{2}\Gamma(2+\frac{2}{|\tilde{\lambda}|})}.$$

توجه شود که تابع وزن در رابطه بالا تابع مثبتی روی همه محدوده x می باشد.

---

[2]Hypergeometric function

۳- حالت های همدوس فوتون افزوده باروت – جیراردلو

یک کلاس جالب از حالت های غیر کلاسیکی حالت های فوتون افزوده می باشد. به منظور ساختن این حالت ها در مورد نوسانگر غیرخطی از حالت های باروت -جیراردلو می توان نوشت:

$$|z,k,m\rangle=\frac{\hat{A}^{+m}}{\sqrt{N_m(|z|^2)}}|z,k\rangle, \qquad (۱۸)$$

که $\hat{A}^{+}$ عملگر آفرینش در رابطه (۳) می باشد. m عدد صحیح مثبتی است که معرف شمار فوتون های افزوده و $N_m(|z|^2)$ ضریب بهنجارش است. با محاسبه می توان نشان داد:

$$|z,k,m\rangle=\frac{1}{\sqrt{N'}}\sum_{n=0}^{\infty} z^n\left(\frac{|\tilde{\lambda}|}{2}\right)^{\frac{-n}{2}} \sqrt{\frac{\Gamma(m+n+1)\Gamma(n+m+2+\frac{2}{|\tilde{\lambda}|})\Gamma(2+\frac{2}{|\tilde{\lambda}|})}{\Gamma^2(n+1)\Gamma^2(n+2+\frac{2}{|\tilde{\lambda}|})}}|n+m\rangle,$$

که به صورت زیر باز نویسی می شود:

$$|z,k,m\rangle=\frac{1}{\sqrt{N'}}\sum_{n=m}^{\infty} z^{n-m}\left(\frac{|\tilde{\lambda}|}{2}\right)^{\frac{m-n}{2}} \sqrt{\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(n+2+\frac{2}{|\tilde{\lambda}|})\Gamma(2+\frac{2}{|\tilde{\lambda}|})}{\Gamma^2(n-m+1)\Gamma^2(n-m+2+\frac{2}{|\tilde{\lambda}|})}}|n\rangle.$$

(۱۹)

که $N'=N(|z|^2)N_m(|z|^2)$ به صورت زیر بیان می شود:

$$N'=\frac{\Gamma(m+1)\Gamma(m+2+\frac{2}{|\tilde{\lambda}|})}{\Gamma(2+\frac{2}{|\tilde{\lambda}|})}\times$$
$${}_2F_2([m+1,m+2+\frac{2}{|\tilde{\lambda}|}];[1,2+\frac{2}{|\tilde{\lambda}|},2+\frac{2}{|\tilde{\lambda}|}];2\frac{|z|^2}{|\tilde{\lambda}|}).$$

واضح است که $|z,k,m\rangle$ و N' در حالت $m=0$ بر $|z,k\rangle$ و $N(|z|^2)$ منطبق می شوند. به راحتی می توان نشان داد که:

$$\langle z',k,m|z,k,m\rangle\neq 0, \qquad (۲۰)$$

یعنی حالت های معرفی شده در (۱۹) غیر متعامدند.

لازم است توجه داشته باشیم، حالت های همدوس فوتون افزوده، یک برهم نهی روی حالت های فوک با نقطه شروع m می باشند بنابراین عملگر همانی روی کل فضای هیلبرت تعریف نمی شود و فقط یک زیر فضا از فضای هیلبرت را شامل می شود که به صورت زیر بیان می شود:

$$\hat{I}_m=\sum_{n=m}^{\infty}|n\rangle\langle n|=\sum_{n=0}^{\infty}|n+m\rangle\langle n+m|.$$

مشابه با بخش قبل، می توان نشان داد حالت های همدوس فوتون افزوده، رابطه انتگرالی همانی را به صورت :

$$\int|z,k,m\rangle\langle z,k,m|\,N'\omega_k^m(|z|^2)\frac{d^2z}{\pi}=\hat{I}_m, \qquad (۲۱)$$

و با تابع وزن مثبت زیر برآورده می نماید.

$$\omega(|z|^2)=\frac{G^{40}_{24}\left(\frac{2|z|^2}{|\tilde{\lambda}|}\left|\begin{matrix}[];m,m+1+\frac{2}{|\tilde{\lambda}|}\\ 0,0,\frac{2}{|\tilde{\lambda}|}+1,\frac{2}{|\tilde{\lambda}|}+1;[]\end{matrix}\right.\right)}{\frac{|\tilde{\lambda}|}{2}\Gamma(2+\frac{2}{|\tilde{\lambda}|})}.$$

۴-خواص آماری حالت های همدوس

احتمال پیدا کردن n فوتون در حالت همدوس $|\beta\rangle$ به صورت $P_n=|\langle n|\beta\rangle|^2$ محاسبه می شود.

در رابطه با نوسانگر مورد نظر توزیع احتمال برای حالت های همدوس باروت- جیراردلو و حالت های همدوس فوتون افزوده باروت- جیراردلو به ترتیب به صورت زیر به دست می آید:

$$P_n=|C_n|^2=\frac{(\frac{2|z|^2}{|\tilde{\lambda}|})^n}{N(|z|^2)}\frac{\Gamma(2+\frac{2}{|\tilde{\lambda}|})}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+2+\frac{2}{|\tilde{\lambda}|})},$$

(۲۲)

$$P_n^m=\frac{(|z|^2)^{n-m}}{N'}\left(\frac{|\tilde{\lambda}|}{2}\right)^{m-n}\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(n+2+\frac{2}{|\tilde{\lambda}|})\Gamma(2+\frac{2}{|\tilde{\lambda}|})}{\Gamma^2(n-m+1)\Gamma^2(n-m+2+\frac{2}{|\tilde{\lambda}|})}.$$

(۲۳)

به راحتی می توان بین این دو توزیع احتمال روابط زیر را تحقیق نمود:

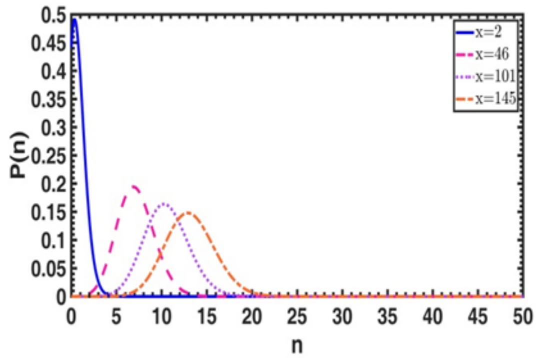
$$P_n^m = \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(n+2+\frac{2}{|\tilde{\lambda}|})}{N_m(|z|^2)\Gamma(n-m+1)\Gamma(n-m+2+\frac{2}{|\tilde{\lambda}|})} P_{n-m}^0,$$

$$P_n^m = \frac{(|z|^2)^{-m}(\frac{|\tilde{\lambda}|}{2})^m \Gamma^2(n+1)\Gamma^2(n+2+\frac{2}{|\tilde{\lambda}|})}{N_m(|z|^2)\Gamma^2(n-m+1)\Gamma^2(n-m+2+\frac{2}{|\tilde{\lambda}|})} P_n^0$$

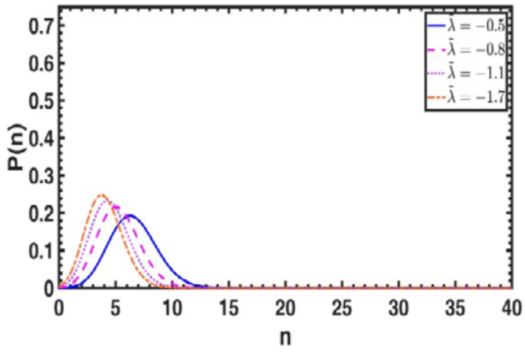
بنابراین احتمال پیدا کردن n فوتون برای $n<m$ برابر با صفر می باشد. می توان نشان داد، تابع توزیع احتمال در حد $\tilde{\lambda} \to 0$ بر تابع توزیع احتمال نوسانگر هماهنگ ساده برای حالت های همدوس افزوده استاندارد تطابق دارد. [8].

$$\lim_{\tilde{\lambda}\to 0} P_n^m(|z|^2) \to \frac{n!}{N_m(|z|^2)(n-m)!} P_{n-m}^0,$$

شکل (۱) و (۲) نمودار تغییرات تابع احتمال در رابطه (۲۳) بر حسب n را به ترتیب برای مقادیر مختلفی از $\tilde{\lambda}$ و x نشان می دهد. می توان این طور نتیجه گرفت که با افزایش x و $|\tilde{\lambda}|$ پیک احتمال شدت بیشتری خواهد داشت و نمودار یک شیفت به چپ را تجربه می کند.



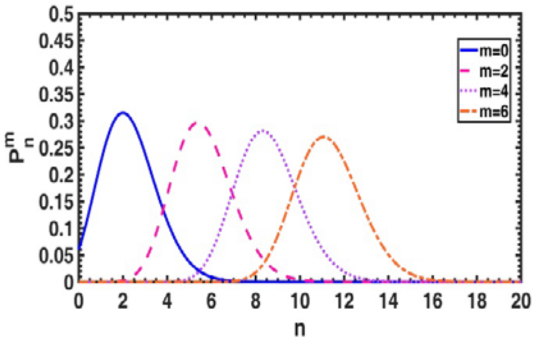
شکل ۱.نمایش تابع توزیع احتمال بر حسب n برای حالت های همدوس باروت-جیراردلو با $\tilde{\lambda}=-1.25$ و مقادیر مختلفی از پارامتر مختلط حالت های همدوس



شکل ۲: نمایش تابع توزیع احتمال بر حسب n برای حالت های همدوس باروت-جیراردلو با $x=20$ و مقادیر مختلف پارامتر غیرخطی $\tilde{\lambda}$

شکل (۳) تغییرات تابع احتمال در رابطه (۲۳) را برحسب n برای مقادیر مختلفی از برانگیختگی نمایش می دهد. بر اساس این شکل، شدت تابع احتمال با افزایش m کاهش می یابد و پیک این تابع در مقدار متوسط n بیشتری اتفاق می افتد. در ادامه به بررسی ویژگی های آماری حالت های همدوس معرفی شده در روابط (۱۲) و (۱۹) می پردازیم. یکی از ابزار های مهم در تعیین طبیعت تابع توزیع پارامتر مندل[3] می باشد که به صورت زیر تعریف می شود:

$$Q = \frac{(\Delta\hat{N})^2}{<\hat{N}>} - 1, \qquad (۲۴)$$



شکل ۳.نمایش تابع توزیع احتمال بر حسب n برای حالت های همدوس فوتون اضافه شده باروت-جیراردلو برای $x=10$ و $\tilde{\lambda}=-1.7$ و مقادیر مختلفی از m

[3] Mandel Q-parameter

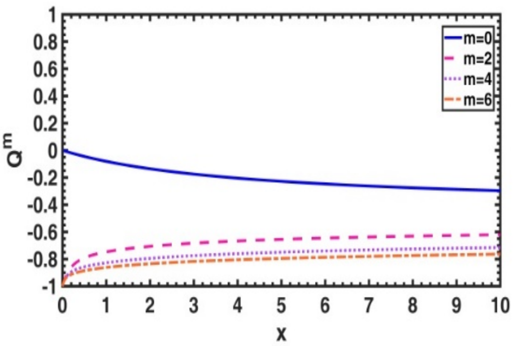
که $\langle \hat{N} \rangle$ متوسط عملگر تعداد و $(\Delta\hat{N})^2 = \langle \hat{N}^2 \rangle - \langle \hat{N} \rangle^2$ واریانس(پراکندگی) توزیع می باشد. براین اساس $Q=0$ متناظر با توزیع پواسونی می باشد و $Q>0$ و $Q<0$ به ترتیب بیانگر آمار فرا پواسونی[۴] و زیر پواسونی[۵] می باشند.

با توجه به اینکه پارامتر غیر منفی مندل متناظر با یک حالت غیرکلاسیکی می باشد، آمار زیرپواسونی نشانگر ویژگی غیر کلاسیکی بردار حالت سیستم می باشد.

با محاسبه می توان نشان داد که این پارامتر برای حالت های همدوس باروت - جیراردلو و حالت های همدوس فوتون افزوده به ترتیب به صورت زیر به دست می آید:

$$Q = x\frac{d}{dx}\ln\frac{d}{dx}\ln N(x),$$
$$Q^m = \frac{x^2\dfrac{d^2}{d^2x}\ln N^{'}(x) - m}{x\dfrac{d}{dx}\ln N'(x) + m}.$$

شکل (۴)، تغییرات پارامتر مندل را برحسب x نمایش می دهد. واضح است که در هر دو مورد حالت های همدوس، پارامتر مندل منفی است که بیانگر اینست که این دو بردار حالت متناظر با



شکل۴.:نمایش تغییرات پارامتر مندل بر حسب x برای حالت های همدوس فوتون افزوده باروت–جیراردلو برای $m = 0,2,4,6$

حالات غیرکلاسیکی می باشند. با توجه به اینکه با افزایش فوتون ها، پارامتر مندل منفی تر می شود. می توان نتیجه گرفت که خواص غیرکلاسیکی حالت ها ی همدوس با افزایش شمار فوتون ها افزایش می یابد. همچنین می توان نشان داد، پارامتر مندل با تغییرات پارامتر غیر خطی تغییرات چشم گیری نخواهد داشت.

۵- نتیجه گیری

در این مقاله گروه $SU(1,1)$ به عنوان گروه دینامیکی نوسانگر غیرخطی با جرم موثر وابسته به موقعیت معرفی شد. بر این اساس حالت های همدوس تعمیم یافته وفوتون افزوده باروت- جیراردلو و خواص ویژه و اساسی این دو به تفصیل مورد بررسی قرار گرفت. در نهایت به توصیف آمار ی این دو حالت همدوس بر اساس تابع توریع احتمال و پارامتر مندل پرداختیم. نمودار ها نشان داد که افزایش x و $|\tilde{\lambda}|$ پیک احتمال شدت بیشتری خواهد داشت و نمودار یک شیفت به چپ را تجربه می کند. همچنین پارامتر مندل در هر دو حالت مقادیر منفی را اختیار می کند که این بیانگر آن است که این دو بردار حالت خواص غیر کلاسیکی از خود نمایش می دهند. یعنی افزایش برانگیختی ویژگی های غیر کلاسیکی نمایان تر خواهد شد.

پیوست

در این بخش روابط استفاده شده برای رسیدن به حالت های همدوس و تابع توزیع احتمال آورده شده است.

$$\Gamma(n+1) = n! \quad ,$$
$$\Gamma(n+1) = n(n-1) \quad ,$$
$${}_pF_q(a_1,...,a_p;b_1,...b_q;z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a_1)_n(a_2)_n...(a_p)_n}{(b_1)_n(b_2)_n...(b_q)_n}\frac{z^n}{n!} \quad ,$$
$$(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)},$$

[4] Super- poissonian

[5] Sub-poissonian

$$\int_0^\infty G_{pq}^{mn}\left(\beta x\left|\begin{matrix} a_1,...a_n; a_{n+1},...a_p \\ b_1,...b_m; b_{m+1},...b_q\end{matrix}\right.\right) x^{s-1}\, dx$$

$$=\frac{\prod\limits_{j=1}^{m}\Gamma(b_j+s)\prod\limits_{j=1}^{n}\Gamma(1-a_j-s)}{\prod\limits_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_j-s)\prod\limits_{j=n+1}^{p}\Gamma(a_j+s)}\ \beta^{-s}$$

اثبات رابطه : در این قسمت نشان خواهیم داد حالت های همدوس باروت جیراردلو درحد $\tilde{\lambda}\to 0$ بر حالت های همدوس استاندارد منطبق می شوند.

$$\rho(n)=\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(n+2+\frac{2}{|\tilde{\lambda}|})}{\Gamma(2+\frac{2}{|\tilde{\lambda}|})}=$$

$$\frac{n!(n+\frac{2}{|\tilde{\lambda}|}+1)!}{(\frac{2}{|\tilde{\lambda}|}+1)!}=$$

$$\frac{n!(n+\frac{2}{|\tilde{\lambda}|}+1)(n+\frac{2}{|\tilde{\lambda}|}),...(\frac{2}{|\tilde{\lambda}|}+2)(\frac{2}{|\tilde{\lambda}|}+1)!}{(\frac{2}{|\tilde{\lambda}|}+1)!}$$

$$=n!(\frac{|\tilde{\lambda}|}{2})^n(\frac{|\tilde{\lambda}|}{2}n+1+\frac{|\tilde{\lambda}|}{2})(\frac{|\tilde{\lambda}|}{2}n+1),...(\frac{|\tilde{\lambda}|}{2}+1)$$

با این ساده سازی می توان در حد $\tilde{\lambda}\to 0$ به حالت های همدوس استاندارد رسید.

منابع

[1]- E.Schrodinge, "Der stetigeUbergang Von der Mikro-urMakromechanik Naturwiss ".14, 664-666,1926.

[2]-R.J.Glauber, "Coherent and de coherent states of the radiation field ". Phys .Rev, 131, 2766-2788, 1963.

[3]-G.P.Gazeau, “Coherent states in quantum physics”, Wiley-VCH , Berlin,2009.

[4]- A.Perelomov, "Generalized coherent states and their application",Springer-verlag, Berlin, Heidelerge , Newyork , London , Parise , Tokyo ,1986.

[5]-A.O.Barut,"Dynamic group and generalized symmetries in quantum theory" , University of Canterbury,Christchurch , 1971.

[6].P.M.Mathews and M.Lakshanan," On a unique nonlinear oscillator" ,Quart.Appl.Math.32,215-218.1974

[7]- Amir.N., " Ladder operator , associated algebras for position-dependent mass systems" , EPL , 111, 20005 , 2015.

[8]-V.V.Dodonov,M.A.Marchiolli, Ya.A. Korennoy, V.I.Man’ko. and Y.A.Moukhin.Y.A., "Dynamical squeezing of photon added coherentstates",Physical Review A,58,5, 1998.

[9]- G.S.Agarwal and K.Tara, " Nonclassical properties of states generated by excitations on a coherent state" , Phys.Rev.A , 43,492,1991.

[10]- R.J.Glauber, "Photon correlation", Phys .Rev,let.10 ,84 ,1963.

[11]-JF.Carien., MF. Ranada, M. Santand, M.Senthilvelan." A nonlinear oscillator with quasi-harmonic behaviour: two- and n-dimensional osillators ", Nonlinearity , 17, 2004.

[12]-C.Brif,A.Vourda , A.Mann, "Analytic representation based on SU(1,1) coherent states and their applications",Journal of physics A :Math .Gen,29,587 3-5885,1996.

JMRPh. (9)(1): 35-43, Spring and Summer 2024

Photon –added Barut –Girardello coherent states for non-linear harmonic oscillator

Rezaei, Sodabe [1*]; Rabeie, Ardeshir [1]

[1] Department of Physics Razi University, Kermanshah

Article details

Received: 2021/12/8
Accepted: 2025/02/1
Published: 2025/02/15

ISSN: 2588-493x
eSSN: 2588-4821

*Correspondence email:
sodaber9@gmail.com

Abstract

In this paper, we introduce the generalized coherent states and Photon- added coherent states in the sence of Barut-Girardello for the nonlinear harmonic oscillator with position dependent study of the resolution of the unity as the The effective mass. fundamental property of coherent states, is done in Meijer G-function. Also, the non- classical features of these two states are calculated and analyzed by using the probability distribution function and Mandel parameter.

Keywords: Barut- Girardello coherent states, Photon –added coherent states, Non- classical features, Probability distribution function, Mandel parameter