

## گذر فاز کوانتومی در هسته‌های زوج و فرد با استفاده از مدل جبری دو خوشه‌ای

مریم قبانوری<sup>۱\*</sup>، نرجس امیری<sup>۲</sup>، محمد علی جعفری‌زاده<sup>۳</sup>، مسعود صیدی<sup>۴</sup>

<sup>۱\*</sup> پژوهشکده پلاسما و گداخت هسته‌ای، پژوهشگاه علوم و فنون هسته‌ای، تهران، ایران

<sup>۱</sup> گروه فیزیک هسته‌ای، دانشکده فیزیک، دانشگاه تبریز، تبریز، ایران

<sup>۳</sup> گروه فیزیک نظری، دانشکده فیزیک، دانشگاه تبریز، تبریز، ایران

<sup>۴</sup> گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه ایلام، ایلام، ایران

دریافت: ۱۴۰۰/۱۱/۲۱ پذیرش: ۱۴۰۲/۷/۱۵

### چکیده:

"مدل جبری خوشه‌ای (ACM) برای توصیف حرکت نسبی خوشه با در نظر گرفتن درجات آزادی ارتعاشی و چرخشی بکار میرود. در این پژوهش با استفاده از هامیلتونین ACM دو جسمی، گذار فاز کوانتومی در ناحیه گذار  $O(4) \leftrightarrow U(3)$  برای ساختارهای هسته‌ای فرد مانند:  $^{10}B$ ،  $^A Be$ ،  $^9B$  و  $^9Be$  بررسی شده است. سطوح انرژی، مقدار انتظاری عملگر تعداد بوزون در تابعی از پارامترهای کنترلی هامیلتونین محاسبه و همچنین تأثیر تزویج نوکلئون فرد با هسته بوزونی زوج-زوج در نقطه بحرانی بحث شده است. داده‌های تجربی، نتایج عددی حاصل را تایید می‌کنند.

**واژه‌های کلیدی:** مدل جبر خوشه‌ای، درجات آزادی چرخشی و ارتعاشی، نقطه بحرانی

### ۱. مقدمه

با نگاهی به نمودار تجربی انرژی‌های بستگی به ازای هر نوکلئون مشاهده میشود که هسته‌های سبک، با افزایش تعداد نوکلئونها متحمل نوسانهای بزرگی میشوند که بیشینه‌های این نوسانها در هسته‌های با عدد جرمی  $A = 4n$  و  $Z = N$  رخ میدهند. هسته‌هایی که در این بیشینه‌ها قرار دارند به ازای  $n = \{1, 2, 3, 4\}$ ، به ترتیب  $^4He$ ،  $^8Be$ ،  $^{12}C$  و  $^{16}O$  میباشند که به نوعی بیانگر خوشه بندی آلفا در این هسته‌ها است [۱-۳]. مطالعه ساختار خوشه‌ای هسته‌های سبک به دهه ۳۰ میلادی برمیگردد. پیشگامان این عرصه افرادی چون ویلر<sup>۱</sup> [۴]، هفستارد و تلر<sup>۲</sup> [۵ و ۲]، دنیسون<sup>۱</sup> [۶] و کامنی<sup>۲</sup> [۷]

\* . Corresponding Author: m.ghapanvari@tabrizu.ac.ir

<sup>۱</sup>. Wheeler

<sup>۲</sup>. Hafstad and Teller

بودند. بدنبال کارهای آنها وایلدرموس<sup>۲</sup> و کالن پولوس<sup>۴</sup> [۸] توانستند مدل خوشه ای را به مدل لایه ای مرتبط کنند. روند توسعه مدل‌های خوشه ای تا سال ۲۰۰۶ را میتوان در مقالات مروری [۹] دید. از سال ۲۰۰۶ تاکنون مدل‌های مختلفی برای مطالعه هسته های سبک با ساختار خوشه ای ارائه شده است که برخی از مهمترین این روشها عبارتند از: روش دینامیک مولکولی نامتقارن (AMD) [۱۰]، دینامیک مولکولی فرمیونی (FMD) [۱۱]، مدل خوشه ای BEC گونه [۱۲]، مدل شبکه ای EFT [۱۳] و مدل جبری خوشه ای (ACM) [۳ و ۱۴].

از میان این روشها، مدل‌های ACM برای مطالعه سیستم های بس-ذره ای و چند ذره ای، کارآمد میباشند. در ACM بجای حل معادلات دیفرانسیل در فضای مختصات میتوان با قطری کردن هامیلتونین سیستم، ویژه مقادیر انرژی و ویژه بردارها را بدست آورد. مدل اندرکنش بوزونی<sup>۵</sup> (IBM) نمونه شاخصی از مدل‌های جبری است که در توصیف حالات جمعی هسته های زوج - زوج بسیار موفق بوده است [۱]. برای توصیف حالات خوشه های- $\alpha$  در هسته های سنگین در چارچوب ACM میتوان به دو ساختار جبری معروف اشاره کرد [۱۵]: نخست ساختاری که به کمک گروه  $U(6)$  توصیف میشود. مولدهای این ساختار جبری بوزونهای  $(s, d)$  هستند. در این ساختار درجات آزادی چهار قطبی مسئول تغییر شکل هسته میباشند. ساختار دیگر به کمک گروه  $U(4)$  توصیف می شود که مولدهای آن بوزونهای  $(s^*, d^*)$  هستند. در اینجا درجات آزادی دوقطبی عامل خوشه بندی می باشد [۱۶ و ۱۷].

اولین مدل جبری بررسی سیستم های چند ذره ای، مدل ویبرون<sup>۶</sup> بود [۲]، که برای توصیف دینامیکی حرکات ارتعاشی و چرخشی دو شیء بصورت یک دوقطبی با سه درجه آزادی بکار میرود. برخی از سیستمهایی که با مدل ویبرون توصیف میشوند عبارتند از: مولکولهای دواتمی [۲]، هسته های متشکل از دو خوشه [۱۸، ۱۹ و ۱۵]، مزونهای با ساختار "کوارک و پاد کوارک" [۲۱ و ۲۰]. برای توصیف سیستمهای سه خوشه ای مانند مولکولهای سه اتمی ( $H_3^+$ ) و باریونها از جبر  $U(7)$  استفاده میشود [۲۲-۲۴]. این ساختار جبری را میتوان به سیستمهای چند خوشه ای نیز تعمیم داد. بعنوان نمونه برای مطالعه سیستمهای متشکل از چهار جسم مانند  $NH_3$ ، جبر  $U(10)$  معرفی شده است. برای اولین بار بیجکر<sup>۷</sup> و یاکلو<sup>۸</sup> از جبر  $U(10)$  در چارچوب ACM استفاده کردند. آنها احتمالات گذار  $^{16}O$  را بعنوان یک خوشه متشکل از چهار ذره آلفا محاسبه کردند [۳]. در مورد هسته هایی که تعداد نوکلئون اضافی دارند ساختارهای خوشه ای همچنان برقرارند. در اولین تلاشها اورتن<sup>۹</sup> ساختار  $^9Be$ ،  $^8Be$ ،  $^7Be$  و  $^6Be$  را به کمک مدل لایه ای دو مرکز بررسی کرد [۲۵-۲۷]. بطورخاص در مورد ایزوتوپ  $Be$  با افزودن نوکلئون به صورت  $^A Be + x \rightarrow ^{A+x} Be$  همچنان ساختار خوشه ای حفظ میشود [۲۸-۳۱]. هافستاد و تلر هسته خوشه ای را به سیستم های  $(4n+1)$  مانند:  $^9Be$ ،  $^{13}C$  و  $^{17}O$  بسط دادند. ایده آنها بر اساس ساختار هسته  $^4He$  بود که آخرین نوترون آن در مدار  $p$  می باشد [۲]. مدل موفق دیگری که در سالهای اخیر برای توصیف هسته های  $k\alpha + x$  استفاده شده است،

1. Dennison

2. Kameny

3. Wildermuth

4. Kallanopoulous

5. Interacting Boson Model

6. Vibron

7. Bijker

8. Iachello

9. Oertzen

مدل لایه ای خوشه ای (CSM) است که بر مبنای ACM ساخته شده است [۳۲ و ۳۳]. ساختارهای خوشه ای نیز متحمل گذار فاز کوانتومی (QPT) می شوند. این گذارها به کمک مدل‌های CSM و ACM قابل بررسی هستند. اولین بار QPT هسته ها در چارچوب IBM و مدل ویبرون بررسی شدند [۳۵ و ۳۴، ۱۷].

هدف از این مقاله بررسی QPT در چارچوب مدل ACM برای هسته های دو خوشه ای در ناحیه گذار  $O(4) \leftrightarrow U(3)$  می باشد. ما این روش را برای توصیف هسته های  ${}^4_0Be$ ،  ${}^6_0Be$ ،  ${}^8_0B$  و  ${}^9_0B$  بکار می گیریم. این مدل را می توان با استفاده از یک روش جبری بی نهایت بعدی در چارچوب IBM حل کرد. در اینجا برای توصیف QPT، از مشاهدپذیرهایی مانند انرژی ترازها، تقاطع تراز و مقدار انتظاری عملگر تعداد بوزون استفاده می شود. علاوه نقش فرمیونی با تکانه زاویه ای  $z$  در نقطه بحرانی QPT سیستم های بوزونی بررسی می گردد. بطور کلی این مقاله شامل پنج بخش است که در بخش دوم مدل ACM معرفی میشود، بخش سوم مقاله به جنبه های تئوری مدل اختصاص میابد، بخش چهارم شامل بحث و نتیجه گیری است و در بخش آخر نتیجه گیری کلی ارائه می شود.

## ۲. مدل جبری خوشه ای (ACM)

جبر حاکم بر مدل جبری خوشه ای، جبر یکانی  $U(v+1)$  است که در آن  $v = 3(n-1)$  بیانگر تعداد درجه های آزادی فضایی است. درجه های آزادی سیستم  $n$  خوشه ای با  $(n-1)$  مختصه ژاکوبی، بصورت زیر داده می شود:

$$\bar{\rho}_k = \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}} \left( \sum_{i=1}^k \bar{r}_i - k\bar{r}_{k+1} \right) \quad (1)$$

$$k = 1, 2, \dots, n-1$$

در اینجا  $r_i$  و  $k$  بترتیب بردار موقعیت خوشه  $i$ ام و شماره خوشه میباشند. در ACM از روش کوانتش بوزونی با بوزونهای برداری (یا دوقطبی) و اسکالر (یا تک قطبی) بجای مختصات نسبی ژاکوبی استفاده شده است. در اینجا پایستگی تعداد بوزونها بعنوان یک قید بایستی همواره برقرار باشد. برای هر مختصه نسبی مستقل، از مختصات ژاکوبی، بوزون برداری با  $L_p = 1^-$  و بوزون اسکالر با  $L_p = 0^+$  عبارتند از [۳۱]:

$$s^\dagger, b_{k,m}^\dagger, \quad m = -1, 0, 1 \quad (2)$$

عملگر تعداد کل بوزونها به صورت زیر تعریف می شود:

$$N = s^\dagger s + \sum_k \sum_m b_{k,m}^\dagger b_{k,m} = n_s + \sum_k n_k = \sum_i c_i^\dagger c_i \quad (3)$$

این عملگر با هامیلتونین سیستم جایجا می شود. حالات خوشه به کمک ACM در جملاتی از بوزونهای برداری و اسکالر برهمکنش کننده توصیف می شوند. این بوزونها رویهم رفته یک فضای برداری  $3n-2$  بعدی با ساختار گروهی  $U(3n-2)$  ایجاد می کنند. حالات این سیستم مطابق با نمایش تقلیل ناپذیر کاملاً متقارن  $[N]$ ، طبقه بندی میشوند که در آن  $N$  تعداد کل بوزونها می باشد.

در مورد خوشه های یکسان، هامیلتونین سیستم بایستی تحت جایگشت ها ناوردا باقی بماند. این حالات مطابق با نمایشهای متناظر با گروه جایگشتی  $S_n$  تبدیل می شوند [۳]. هامیلتونین چنین سیستمی با در نظر گرفتن برهمکنشهای دو جسمی به صورت زیر تعریف می شود:

$$H = \sum_{ij} \varepsilon_{ij} G_{ij} + \sum_{ijkl} v_{ijkl} G_{ij} G_{kl}, \quad G_{ij} = c_i^\dagger c_j \quad (4)$$

که در آن  $\varepsilon_{ij}$  و  $v_{ijkl}$  ضرایب ثابتی از جنس انرژی هستند. ویژه مقادیر این سیستم  $n$  خوشه ای با قطی سازی هامیلتونین (۴) امکان پذیر است که در بخش بعدی به آن میپردازیم. زنجیره های جبری مورد نظر در این پژوهش عبارتند از:

$$U(3n-2) \supset \left\{ \begin{array}{l} U(3n-3) \\ O(3n-2) \end{array} \right\} \supset O(3n-3)$$

که برای توصیف رفتار سیستمهای  $n$  خوشه ای بکار می روند.

### ۳. هامیلتونین سیستم $n$ خوشه ای در چارچوب جبر آفین $SU(1,1)$

ایده اساسی مدل های جبری این است که هامیلتونی و دیگر عملگرهای فیزیکی سیستمها را میتوان به کمک مجموعه ای از عملگرهای بوزونی توصیف کرد؛ چرا که حرکات جمعی در این سیستمها را میتوان به عنوان مجموعه ای از اندرکنشهای بوزونی در نظر گرفت. طیف این سیستمها در چارچوب جبر لی تولید میشود. تقارنهای دینامیکی در این چارچوب نقش مهمی ایفا میکنند. بین شکل خوشه ها و تقارنهای دینامیکی تناظر یک به یک وجود دارد. گذر فاز شکلی در اینجا فرایندی است که در آن سیستم از یک تقارن دینامیکی به تقارن دیگر گذار میکند. قطری کردن هامیلتونی در ناحیه گذار به آسانی هر کدام از حدها نیست، به خصوص زمانی که ابعاد فضای پیکربندی نسبتاً بزرگ باشد. برای حل این مشکل، از روش جبر لی بینهایت بعدی  $SU(1,1)$  موسوم به جبر لی آفین  $SU(1,1)$  استفاده می شود. این روش اولین بار توسط پن<sup>۱</sup> و همکاران [۳۶ و ۳۷] پیشنهاد شد. در این مقاله، روش ذکر شده در مرجع [۳۷] گسترش یافته و به مدل های دو خوشه ای در منطقه گذار اعمال خواهد شد. برای این منظور طیف انرژی را برای هسته های زوج - زوج، زوج-فرد و فرد - فرد در سه بخش به صورت زیر بررسی می کنیم.

#### ۳-۱. طیف انرژی هسته های زوج-زوج ( ${}^8Be$ )

مدل جبری خوشه ای برای خوشه های دو بعدی به مدل ویبرون معروف است که در ابتدا برای مولکول های دو اتمی معرفی شد [۳۸]. این مدل قادر به توصیف حرکت نسبی دو خوشه است. در مدل ویبرون، چرخش و ارتعاش به کمک چهار بوزون توصیف میشود: یک بوزون اسکالر با پاریتته مثبت و تکانه زاویه ای  $l=0$ ، که با  $s^\dagger$  مشخص می گردد و سه مولفه بوزون برداری با پاریتته منفی و تکانه زاویه ای  $l=1$  که با  $p_\mu^\dagger$ ،  $\mu=0, \pm 1$  مشخص می شود.

<sup>۱</sup>. Pan

در مدل ویبرون دو زنجیره جبری  $U(4) \supset O(4) \supset O(3)$  و  $U(4) \supset U(3) \supset O(3)$  وجود دارد که به ترتیب حالت های صلب و غیر صلب هستند [۳۸ و ۳۹]. در واقع این دو حالت، ایده ال هستند و در دنیای واقعی هیچگونه مولکول کاملاً صلب و یا غیر صلبی وجود ندارد. اگر حالت های حدی  $O(4)$  و  $U(3)$  به ترتیب بعنوان فازهای صلب و غیر صلب در نظر گرفته شوند آنگاه ناحیه گذار  $U(3) \leftrightarrow O(4)$ ، ناحیه همزیستی دو فاز است. در چارچوب مدل ویبرون، مدهای ارتعاشی- دورانی سیستمهای دو جسمی با هامیلتونین  $U(3) \leftrightarrow O(4)$  توصیف می شود [۳۹]. برای بررسی مدل ویبرون در چارچوب جبر آفین  $SU(1,1)$  لازم است در ابتدا مولدهای جبر  $sd$ -بوزونی را معرفی کنیم. این مولدها عبارتند از:

$$S^+(s) = \frac{1}{4} s^{\dagger 2}, \quad S^-(s) = \frac{1}{4} s^2, \quad S^{\cdot}(s) = \frac{1}{4} (s^{\dagger} s + \frac{1}{4}) = \frac{1}{4} n_s + \frac{1}{4} \quad (5)$$

$$S^+(b) = \frac{1}{4} b^{\dagger} \cdot b^{\dagger}, \quad S^-(b) = \frac{1}{4} \tilde{b} \cdot \tilde{b}, \quad S^{\cdot}(b) = \frac{1}{4} (b^{\dagger} \tilde{b} + \frac{3}{4}) = \frac{1}{4} n_b + \frac{3}{4} \quad (6)$$

که در آن  $n_s$  و  $n_b$  عملگرهای تعداد برای بوزون های اسکالر و برداری است. مولدهای جبر  $SU(1,1)$  در روابط جابجایی زیر صدق می کنند:

$$[S^{\cdot}, S^{\pm}] = \pm S^{\pm}, \quad [S^+, S^-] = -2S^{\cdot} \quad (7)$$

عملگر کازیمیر  $SU(1,1)$  به صورت زیر نوشته می شود:

$$C_{\gamma}(SU(1,1)) = S^{\cdot} (S^{\cdot} - 1) - S^+ S^- \quad (8)$$

به همین ترتیب عملگر کازیمیر  $SU^b(1,1)$  بر حسب کازیمیر  $O(3)$  عبارت است از:

$$C_{\gamma}(SU^b(1,1)) = \frac{1}{4} C_{\gamma}(O(3)) - \frac{3}{16} \quad (9)$$

رابطه عملگرهای کازیمیر  $O(4)$  و  $SU^{sb}(1,1)$  نیز به صورت زیر است:

$$C_{\gamma}(SU^{sb}(1,1)) = \frac{1}{4} C_{\gamma}(O(4)) \quad (10)$$

فرض کنید که  $|k \mu\rangle$  بردار پایه در نمایش  $SU(1,1)$  باشد، که در آن  $\mu = k, k+1, \dots$  عددی مثبت و حقیقی است آنگاه می توان نوشت:

$$C_{\gamma}(SU(1,1)) |k \mu\rangle = k(k-1) |k \mu\rangle \quad (11)$$

$$S^{\cdot} |k \mu\rangle = \mu |k \mu\rangle$$

بردارهای پایه زنجیره های جبری  $U(3) \supset O(3)$  و  $U(4) \supset O(4)$  به ترتیب بردارهای پایه همزمان  $SU^b(1,1) \supset U^b(1,1)$  و  $SU^{sb}(1,1) \supset U^{sb}(1,1)$  نیز هستند [۴۰ و ۴۱]. روابط ویژه بردارهای پایه آنها به صورت زیر نشان داده شده است:

$$|N n_b LM\rangle = \left| N, k_b = \frac{1}{4} (L + \frac{3}{4}), \mu_b = \frac{1}{4} (n_b + \frac{3}{4}), LM \right\rangle$$

برای بردارهای پایه زنجیره جبری  $U(4) \supset U(3) \supset O(3) \supset O(2)$  و  $SU^b(1,1) \supset U^b(1,1)$  به ترتیب  $N, n_b, N$  و  $M$  اعداد کوانتومی  $U(4)$ ،  $U(3)$ ،  $O(3)$  و  $O(2)$  هستند و به همین ترتیب  $k_b$  و  $\mu_b$  اعداد کوانتومی  $SU^b(1,1)$  و  $U^b(1,1)$  هستند. بنابراین، بردارهای پایه زنجیره جبری  $U(4) \supset O(4) \supset O(3) \supset O(2)$  نیز به صورت بردارهای پایه همزمان  $SU^b(1,1)$  و  $U^b(1,1)$  هستند که می توان آنها را به صورت زیر بیان کرد:

$$|N\sigma LM\rangle = \left| N, k_{sb} = \frac{1}{2}(L+2), \mu_{sb} = \frac{1}{2}(N+2), LM \right\rangle \quad (12)$$

که در عبارت بالا  $\sigma$  عدد کوانتومی  $O(4)$  است و  $k_{sb}$  و  $\mu_{sb}$  به ترتیب عدد کوانتومی  $SU^{sb}(1,1)$  و  $U^{sb}(1,1)$  هستند. مولدهای جبر آفین بینهایت بعدی  $SU^{sb}(1,1)$  مشابه تعریف ارائه شده در مرجع [۳۶]، عبارتند از:

$$S_n^\pm = c_s^{(n+1)} S^\pm(s) + c_b^{(n+1)} S^\pm(b) \quad (13)$$

$$S_n^{\cdot} = c_s^{yn} S^{\cdot}(s) + c_b^{yn} S^{\cdot}(b) \quad (14)$$

در روابط (۱۳) و (۱۴)،  $c_b$  و  $c_s$  پارامترهای کنترلی هستند، و  $n$  را می توان  $n=1,2,3,\dots$  در نظر گرفت. برای تخمین طیف های انرژی و احتمالات گذار، مجازیم که  $|lw\rangle$  را به عنوان پایین ترین حالت  $SU^{sb}(1,1)$  در نظر بگیریم که باید در روابط زیر صدق کند:

$$S^-(s)|lw\rangle = 0, \quad S^-(b)|lw\rangle = 0 \quad (15)$$

پایین ترین حالت  $(|lw\rangle)$  مجموعه ای از بردارهای پایه زنجیره  $U(4) \supset U(3) \supset O(3) \supset O(2)$  میباشد که عبارت است از:

$$|lw\rangle_{sb} = \left| N, k_s = \frac{1}{2}(v_s + \frac{1}{2}), \mu_s = \frac{1}{2}(n_s + \frac{1}{2}), k_b = \frac{1}{2}(L + \frac{3}{2}), \mu_b = \frac{1}{2}(n_b + \frac{3}{2}), LM \right\rangle \quad (16)$$

که در آن:  $n_s = v_s = 0, 1$ ،  $n_b = L$ ،  $N = v_s + v_b$  می باشد. بنابراین داریم:

$$\left\{ \begin{aligned} S_n^{\cdot} |lw\rangle &= (c_s^{(yn)} S^{\cdot}(s) + c_b^{(yn)} S^{\cdot}(b)) |lw\rangle = \Lambda_n^{\cdot} |lw\rangle \\ \Lambda_n^{\cdot} &= (c_s^{(yn)} (v_s + \frac{1}{2}) + c_b^{(yn)} (L + \frac{3}{2})) \frac{1}{2} \end{aligned} \right. \quad (17)$$

با استفاده از مولدهای  $SU^{sb}(1,1)$ ، می توان هامیلتونی به صورت زیر برای ناحیه گذار  $O(4) \leftrightarrow U(3)$  نوشت:

$$H = gS_+^+ S_-^- + \alpha S_1^{\cdot} + \beta C_1(O(3)) \quad (18)$$

در رابطه (۱۸) اگر  $c_s = c_b$  باشد هامیلتونین در حد  $O(4)$  قرار دارد و اگر  $c_s = 0$  و  $c_b \neq 0$  باشد آنگاه هامیلتونین در حد  $U(3)$  است. برای سادگی  $c_b$  را برابر با ۱ می گیرند و اجازه می دهند پارامتر  $c_s$  در بازه  $[0, 1]$  تغییر کند. پارامتر  $c_s$  یا  $c$

پارامتر فاز نامیده می‌شود. برای قطری کردن هامیلتونین از حدت جبری بٹ استفاده می‌شود. بر مبنای این حدت ویژه حالات هامیلتون (۱۸) عبارتند از:

$$\begin{cases} |k; v_s LM\rangle = NS^+(x_1)S^+(x_2)\dots S^+(x_k)|lw\rangle \\ S^+(x_i) = \frac{c_s}{1-c_s^*x_i}S^+(s) + \frac{c_b}{1-c_b^*x_i}S^+(b), \quad i=1,2,\dots,k \end{cases} \quad (19)$$

در رابطه فوق  $S^+(x_i)$  عملگر تابعی از عملگرهای  $S^+(s)$  و  $S^+(b)$  با پارامتر طیفی  $x_i$  میباشد و  $N$  ضریب بهنجارش است. به کمک بسط فوریه - لوران  $S^+(x_i)$  بر حسب پارامترهای طیفی، ویژه حالات هامیلتون بصورت زیر حاصل می‌شود:

$$|k; v_s LM\rangle = N \sum_{n_i \in \mathbb{Z}^+} a_{n_1} a_{n_2} \dots a_{n_k} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_k^{n_k} S_{n_1}^+ S_{n_2}^+ \dots S_{n_k}^+ |lw\rangle \quad (20)$$

برای تعیین پارامترهای طیفی از معادله بٹ استفاده میشود که در زیر داده شده است:

$$\frac{\alpha}{x_i} = \frac{gc_s^*(v_s + \frac{1}{2})}{1-c_s^*x_i} + \frac{gc_b^*(L + \frac{3}{2})}{1-c_b^*x_i} - \sum_{i \neq j} \frac{2g}{x_i - x_j} \quad (21)$$

به این ترتیب با حل معادله بٹ طیف انرژی از هامیلتونین (۱۸) بصورت زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{cases} E^{(k)} = h^{(k)} + \alpha\Lambda_1 + \beta L(L+1) \\ h^{(k)} = \sum_{i=1}^k \frac{\alpha}{x_i}, \quad g=1 \end{cases} \quad (22)$$

اعدد کوانتومی  $k$  با  $N$  به صورت  $N = 2k + v_s + v_b = 2k + v_s + L$  به هم مربوط هستند.

### ۳-۲. طیف انرژی هسته های زوج-فرد ( ${}^9Be$ و ${}^9B$ )

در تشابه با فیزیک مولکولی بیش از دو دهه است که هسته  ${}^9Be$  به عنوان نمونه ای از پیوند کوالانسی مولکولی در فیزیک هسته ای شناخته شده است. این مولکول هسته ای متشکل از دو ذره آلفا است که توسط یک نوترون ظرفیتی به هم متصل شده اند. هسته  ${}^9Be$  با ساختار  $2\alpha + n$  سنگ بنای فیزیک خوشه است [۹]. با توجه به آستانه پایین انرژی جدایی نوترون ظرفیتی،  ${}^9Be$  می تواند منبع مولد هسته های پایدار  ${}^8Be$  باشد. ایزوتوپ  ${}^8Be$  به عنوان تنها هسته ای شناخته شده ای است که حالت پایه آن به عنوان ذره  $2\alpha$  شناخته می شود. با توجه به ساختار هسته ای  ${}^9Be$ ، می توان اثبات کرد که نوترون ظرفیتی آن در مدار  $p_{3/2}$  قرار دارد. ترکیب خطی دو تا از چنین نوترونهایی یک مولکول هسته ای در  ${}^9Be$  را تشکیل میدهد [۹، ۳۰، ۴۲ و ۴۳]. در واقع این ساختار را می توان بصورت بوزون + فرمیون در نظر گرفت. ساختار جبری بخش بوزونی را می توان با جبر  $U^B(4)$  نمایش داد در حالیکه ساختار جبری بخش فرمیونی بستگی به مقادیر تکانه زاویه ای فرمیون ( $j$ ) دارد [۲۰]. در این فضای جبری، دو حد تقارن دینامیکی  $U^B(3)$  و  $O^B(4)$ ، با در نظر گرفتن فضای فرمیونی به دو زنجیره جبری زیر مربوط می شوند:

$$U^B(\varphi) \otimes U^F(2j+1) \supset \left\{ \begin{array}{l} U^{(B)}(\varphi) \\ O^{(B)}(\varphi) \end{array} \right\} \otimes SU^F(2j+1) \supset O^B(\varphi) \otimes Sp^F(2j+1) \supset \\ O^B(\varphi) \otimes SU^F(2) \supset Spin^{BF}(\varphi) \quad (23)$$

حالت پارته منفی در هسته های فرد  ${}^A Be$  و  ${}^A B$  عمدتاً در پوسته  $2p_{7/2}$  ایجاد می شود [۴۴]. نوترون ظرفیتی در ترازهای  $1d_{5/2}$  و  $2s_{1/2}$  دارای پارته مثبت می باشد [۳۰]. در این مطالعه فرض شده است که حالات ذره منفرد  $2p_{7/2}$  و  $2s_{1/2}$  باشند. شبکه های جبری در این موارد به ترتیب با قرار دادن  $j=3/2$  و  $j=1/2$  در رابطه (۲۳) بدست می آیند. با استفاده از مولدهای جبر  $SU(1,1)$  و عملگرهای کازیمیر زیرجرها، هامیلتونی زیر برای توصیف حالات منفی و مثبت در منطقه گذار حاصل می شود:

$$\hat{H} = gS_+^+ S_-^- + \alpha S_+^+ + \beta \hat{C}_\varphi(SO^B(\varphi)) + \gamma \hat{C}_\varphi(spin^{BF}(\varphi)) \quad (24)$$

برای محاسبه ویژه مقادیر هامیلتونی (۲۴)، ویژه حالت زیر در نظر گرفته می شود:

$$|k; \nu_s \nu_b n_\Delta LJM\rangle = \Theta S_{x_1}^+ S_{x_2}^+ \dots S_{x_k}^+ |lw\rangle^{BF} \quad (25)$$

با استفاده از ضرایب کلبش-گودرن (CG) می توانیم پایین ترین حالت را برحسب بخش بوزونی و فرمیونی به صورت زیر تعریف کنیم:

$$|lw\rangle^{BF} = \sum_j \sum_{m_j=-j}^{m_j=+j} C_{m, m-m_j, m_j}^{J, L, j} |lw\rangle_{sb}^B |j, m_j\rangle \quad (26)$$

نماد  $C_{m, m-m_j, m_j}^{J, L, j}$ ، ضریب کلبش-گودرن می باشد. می توان نشان داد که طیف انرژی هامیلتون (۲۴) از رابطه زیر پیروی می کند:

$$E^{(k)} = h^{(k)} + \alpha \Lambda_1^0 + \beta L(L+1) + \gamma J(J+1) \quad (27)$$

با استفاده از روش حداقل مربعات و داده های تجربی می توان ضرایب ثابت معادله (۲۷) را بدست آورد.

### ۳-۳. هسته های فرد - فرد ( ${}^A B$ )

ساختار هسته های فرد-فرد ممکن است بصورت یک پروتون جفت نشده و یک نوترون جفت نشده همراه با یک مغز بوزونی توصیف شود. در این مقاله، روش مشخص شده در مراجع [۳۶، ۳۷] گسترش یافته و در سیستم های مختلط بوزون-فرمیون-فرمیون بکار رفته است. در اینجا از رویکرد مبتنی بر تقارن بوزون-فرمیون نیز برای سیستم های فرد-فرد استفاده شده است. از طرف دیگر، IBFM به هسته های فرد-فرد نیز گسترش یافته است که به آن مدل IBFFM می گویند. برای سادگی محاسباتی، ساختار هسته های فرد-فرد به عنوان یک پروتون و یک نوترون جفت نشده به همراه یک  ${}^A Be$  توصیف می شود. لازم به ذکر است که ما انتقال فاز را از شکلهای صلب و غیرصلب را در این موارد بررسی کرده ایم که در آن پروتون و



نوترون فرد-فرد با  $j = 3/2$  به همراه هسته، تحت گذار از  $U^B(3)$  به  $O^B(4)$  قرار گرفته است. ساختار جبری ای که اساس آن رویکرد IBFM-1 است، در رابطه زیر نشان داده شده است:

$$U^B(4) \otimes (U^{F_\pi}(4) \otimes U^{F_\nu}(4)) \supset \left\{ \begin{matrix} U^{(B)}(3) \\ O^{(B)}(4) \end{matrix} \right\} \otimes SU^{F_{\pi\nu}}(4) \supset \tag{28}$$

$$O^B(3) \otimes Sp^{F_{\pi\nu}}(4) \supset O^B(3) \otimes SU^{F_{\pi\nu}}(2) \supset O_{\pi\nu}^{BF}(3) \supset O_{\pi\nu}^{BF}(2)$$

با توجه به رابطه (۲۸) ابتدا بوزونها با هم جفت شده اند و سپس فرمیون ها و متعاقباً ترکیب بوزون ها و فرمیون ها با هم جفت می شوند. هامیلتونین برای هسته های فرد-فرد از یک قسمت بوزونی و قسمت هایی که بیانگر تعامل بوزون-فرمیون و تعامل فرمیون-فرمیون است، تشکیل شده است. هامیلتونین با  $j_\pi = 3/2$  و  $j_\nu = 3/2$  در ناحیه گذار  $O(4) \leftrightarrow U(3)$  با استفاده از عملگرهای کازیمیر زنجیره گروهی (۲۸) ایجاد می شود که در زیر داده شده است:

$$\hat{H} = gS_{B_s}^+ S_{B_s}^- + \alpha S_{B_s}^+ + \beta \hat{C}_\nu(SO^B(2)) + \delta \hat{C}_\nu(SP^{F_{\pi\nu}}(4)) + \beta \hat{C}_\nu(\text{spin}^{BF_{\pi\nu}}(2)) + \gamma \hat{C}_\nu(\text{spin}^{BF_{\pi\nu}}(3)) \tag{29}$$

معادله (۲۹) هامیلتونین پیشنهادی برای سیستمهای بوزون - فرمیون - فرمیون است که در آن  $\alpha, \beta, \delta, \rho$  و  $\gamma$  پارامترهای حقیقی هستند. هامیلتونین (۲۹) در حد صلب قرار دارد اگر  $C_s = 1$  باشد و حد غیر صلب است اگر  $C_s = 0$  و  $C_b \neq 0$  باشد. بدین ترتیب، وضعیت  $C_s \neq C_b \neq 0$  با منطقه گذار مطابقت دارد [۳۶، ۳۷]. برای ارزیابی ویژه مقادیر هامیلتونی (۲۹)، ویژه حالت سیستم به صورت زیر در نظر گرفته می شود:

$$|k; \nu_s, \nu_d, (\xi_1, \xi_2), SL, JM\rangle = \Theta S_{x_1}^+ S_{x_2}^+ S_{x_3}^+ \dots S_{x_k}^+ |lw\rangle^{BF_{\pi\nu}} \tag{30}$$

حالت پایه این سیستم عبارت است از:

$$|lw\rangle^{BF_{\pi\nu}} = \sum_{m_\pi m_\nu M_b} C_{m_\pi, m_\nu, m_b}^{J, j_\pi, j_\nu} C_{M, m_\pi, M_b}^{J, j_\pi, L_b} |j_\pi, m_\pi\rangle |j_\nu, m_\nu\rangle |lw\rangle_{M_b}^B \tag{31}$$

با تاثیر هامیلتونین سیستم روی ویژه حالات، طیف انرژی به صورت زیر حاصل می شود:

$$E^{(k)} = h^{(k)} + \alpha \Lambda_1^0 + \beta L(L+1) + \rho(\xi_{1\pi\nu}(\xi_{1\pi\nu} + 3)) + \xi_{2\pi\nu}(\xi_{2\pi\nu} + 1) + \delta s(s+1) + \gamma J(J+1) \tag{32}$$

مشابه موارد قبلی ضرایب طیف را به کمک روش حداقل مربعات با استفاده از داده های تجربی محاسبه می کنند.

#### ۴. بحث و نتایج

در این بخش نتایج حاصل از محاسبات عددی قابل مشاهده از ACM برای هسته های دو خوشه ای ارائه شده است. ما در این پژوهش، هسته های  $^1B$  و  $^2B$ ،  $^4Be$ ،  $^6Be$  را به عنوان شاهد در نظر گرفته ایم. تمام داده های تجری در این پژوهش از منابع [۴۵ - ۴۹] گرفته شده اند.

#### ۱.۴ طیف انرژی و تقاطع تراز

طیف انرژی مهمترین مشاهده پذیر فیزیکی در یک سیستم کوانتومی می باشد. در اینجا با توجه به مقادیر تجربی، طیف انرژی را برای  $^1B$  و  $^2B$ ،  $^4Be$ ،  $^6Be$  در چارچوب ACM محاسبه می کنیم. برای بدست آوردن طیف انرژی بایستی پارامترهای ثابت طیف انرژی را بدست آورد. برای این منظور ابتدا بایستی معادلات غیر خطی بٹ را حل کرده و پارامترهای طیفی  $x_i$  را به ازای مقادیر مختلف  $k$  محاسبه کرد. با استفاده از داده های تجربی و پارامترهای طیفی میتوانیم ثابت های طیف انرژی را تقریب بزینم. فرایند برآورد ضرایب ثابت بر اساس روش حداقل مربعات می باشد، بطوریکه انحراف معیار استاندارد به حداقل مقدار ممکن خود برسد. برای انجام این محاسبات ما از برنامه MATLAB استفاده کردیم. نتایج حاصل از محاسبات عددی و نظری در جداول (۱) تا (۴) ارائه شده است. در این جداول طیف انرژی را بر حسب تغییرات پارامتر کنترلی  $c$  با گام  $h = 0.1$  در بازه  $c \in [0, 1]$  برآورد کرده ایم.

جدول ۱. طیف انرژی هسته  $^6Be$  حاصل از مدل ACM به ازای مقادیر مختلف پارامتر کنترلی  $c$

$c$	۰	۰.۱	۰.۲	۰.۳	۰.۴	۰.۵	۰.۶	۰.۷	۰.۸	۰.۹	۱	
$J$	$E_{ACM}$	$E_{ACM}$	$E_{ACM}$	$E_{ACM}$	$E_{ACM}$	$E_{ACM}$	$E_{ACM}$	$E_{ACM}$	$E_{ACM}$	$E_{ACM}$	$E_{ACM}$	$E_{exp}$
$1_1^+$	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
$2_1^+$	۳.۹	۳.۹۹	۴.۲۳	۴.۵	۴.۹۸	۵.۴	۵.۸۱	۶.۲	۶.۵۴	۶.۸۵	۷.۱	۳.۰۳
$4_1^+$	۹.۴۶	۹.۶	۱۰.۱۹	۱۱.۰۲	۱۱.۹۸	۱۲.۹۶	۱۳.۸۸	۱۴.۷	۱۵.۴۳	۱۶.۰۶	۱۶.۵	۱۱.۳۵
$2_2^+$	۱۷.۹	۱۷.۷۴	۱۷.۵	۱۶.۹	۱۶.۲۷	۱۵.۶	۱۴.۹۵	۱۴.۳۴	۱۳.۷۸	۱۳.۲۴	۱۲.۹	۱۶.۶۲
$2_3^+$	۱۹.۰۴	۱۸.۹	۱۸.۵	۱۷.۹	۱۷.۲	۱۶.۴	۱۵.۷	۱۵.۰۲	۱۴.۴	۱۳.۸	۱۳.۴	۱۶.۹۲
$4_2^+$	۲۶.۰۶	۲۵.۹۸	۲۵.۸	۲۵.۴۸	۲۵.۱۷	۲۴.۸۵	۲۴.۶۲	۲۴.۴	۲۴.۲	۲۴.۰۶	۲۳.۹۴	۱۹.۸۶
$2_4^+$	۲۰.۲	۲۰.۰۴	۱۹.۶	۱۸.۹۳	۱۸.۱۳	۱۷.۳	۱۶.۴۶	۱۵.۷	۱۵.۰۱	۱۴.۴	۱۳.۹۳	۲۰.۱
$0_2^+$	۱۷.۰۳	۱۸.۱۰	۱۹.۵	۲۱.۰۲	۲۲.۳۴	۲۳.۲۷	۲۳.۸۶	۲۴.۱۶	۲۴.۵	۲۴.۲	۲۴.۰۶	۲۰.۲
$2_5^+$	۲۱.۴	۲۱.۱۹	۲۰.۶۹	۱۹.۹	۱۹.۰۵	۱۸.۱۲	۱۷.۲	۱۶.۳۸	۱۵.۶۳	۱۴.۹۶	۱۴.۴	۲۲.۲
$4_3^+$	۲۷.۲	۲۷.۱۳	۲۶.۸۷	۲۶.۵	۲۶.۱	۲۵.۷	۲۵.۴	۲۵.۰۸	۲۴.۸۳	۲۴.۶۲	۲۴.۵	۲۵.۵

جدول ۲. طیف انرژی هسته  ${}^4\text{Be}$  حاصل از مدل ACM به ازای مقادیر مختلف پارامتر کنترلی  $c$

$c$	۰	۰.۱	۰.۲	۰.۳	۰.۴	۰.۵	۰.۶	۰.۷	۰.۸	۰.۹	۱	
$J$	$E_{ACM}$	$E_{ACM}$	$E_{ACM}$	$E_{ACM}$	$E_{ACM}$	$E_{ACM}$	$E_{ACM}$	$E_{ACM}$	$E_{ACM}$	$E_{ACM}$	$E_{ACM}$	$E_{exp}$
$(3/2)_1^-$	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
$(5/2)_1^-$	۱.۶	۱.۶۲	۱.۷۳	۱.۹	۲.۱۵	۲.۴۷	۲.۸۲	۳.۲۴	۳.۴۱	۳.۷۴	۴.۰۵	۲.۴۳
$(1/2)_1^-$	۲.۱۵	۲.۱۹	۲.۳	۲.۴۷	۲.۷	۲.۹	۳.۲۲	۳.۵	۳.۸	۴.۰۳	۴.۲۵	۲.۷۸
$(3/2)_1^+$	۶.۶	۶.۵۷	۶.۶	۶.۶۵	۶.۷	۶.۷۳	۶.۷۲	۶.۷۳	۶.۶	۶.۵	۶.۴	۵.۵۹
$(7/2)_1^-$	۶.۴	۶.۳۸	۶.۳	۶.۱۷	۶.۰۱	۵.۸۳	۵.۷	۵.۴۷	۶.۲	۶.۱۴	۶.۱	۶.۳۸
$(5/2)_1^+$	۹.۳۸	۹.۳۶	۹.۲۸	۹.۱۶	۹.۰	۸.۸۲	۸.۶	۸.۴۲	۸.۰۷	۷.۸۵	۷.۶۴	۷.۹۴
$(7/2)_1^+$	۱۲.۸	۱۲.۸	۱۲.۸۱	۱۲.۸۱	۱۲.۸۱	۱۲.۷۴	۱۲.۷۱	۱۲.۷۳	۱۲.۵۳	۱۲.۴۸	۱۲.۴۳	۱۱.۲۸
$(1/2)_1^+$	۱۶.۴۴	۱۶.۴۷	۱۶.۵۶	۱۶.۷	۱۶.۸۸	۱۷.۱۴	۱۷.۳۸	۱۷.۷	۱۸.۰۳	۱۸.۲۳	۱۸.۴	۱۶.۹۷
$(5/2)_1^-$	۱۷.۵	۱۷.۴۸	۱۷.۴۳	۱۷.۳۴	۱۷.۲۲	۱۷.۱۳	۱۶.۹۸	۱۶.۹۳	۱۶.۶۳	۱۶.۴۵	۱۶.۲۸	۱۱.۸۱
$(5/2)_1^+$	۱۸.۳۶	۱۸.۳۶	۱۸.۳۷	۱۸.۳۸	۱۸.۳۹	۱۸.۴	۱۸.۴۳	۱۸.۴۱	۱۸.۶۷	۱۸.۷۳	۱۸.۷۸	۱۴.۴۸
$(1/2)_1^+$	۲.۳۲	۲.۳۹	۲.۵۸	۲.۸۵	۳.۱۳	۳.۰۲	۳.۱۵	۱.۹۵	۲.۱۴	۲.۳۱	۲.۴۵	۱.۶۸
$(5/2)_1^+$	۲.۰۷	۱.۲	۲.۲	۲.۳۵	۲.۵۴	۲.۷۵	۲.۹۴	۳.۱۲	۳.۱۵	۳.۲۵	۳.۳۲	۳.۰۵
$(3/2)_1^+$	۳.۷۲	۳.۷۳	۳.۷۴	۳.۷۸	۳.۸۲	۳.۸۷	۹.۳۱	۳.۹۸	۳.۹۴	۳.۹۶	۴.۰	۴.۷
$(9/2)_1^+$	۶.۳۷	۶.۲۸	۶.۳۱	۶.۳۶	۶.۴۳	۶.۵۲	۶.۶۲	۶.۷	۶.۶۳	۶.۷۵	۶.۸۷	۶.۷۶
$(5/2)_1^+$	۱۵.۸	۱۵.۷۸	۱۵.۸	۱۵.۸۱	۱۵.۸۲	۱۵.۸۲	۱۵.۷۸	۱۵.۷۴	۱۵.۶۷	۱۵.۵۵	۱۵.۴۲	۱۶.۶۷
$(7/2)_1^+$	۱۷.۲۶	۱۷.۲۵	۱۷.۲۲	۱۷.۱۶	۱۷.۱	۱۷.۰۴	۱۶.۹۳	۱۶.۹	۱۶.۶	۱۶.۴۳	۱۶.۲۷	۱۷.۴۹
$(9/2)_1^+$	۲۰.۰۶	۲۰.۰۴	۲۰.۰	۱۹.۹۵	۱۹.۹	۱۹.۸۲	۱۹.۷۷	۱۹.۶۷	۱۹.۶۷	۱۹.۶۷	۱۹.۶۸	۱۹.۴۲

جدول ۳. طیف انرژی هسته  ${}^4\text{B}$  حاصل از مدل ACM به ازای مقادیر مختلف پارامتر کنترلی  $c$

$c$	۰	۰.۱	۰.۲	۰.۳	۰.۴	۰.۵	۰.۶	۰.۷	۰.۸	۰.۹	۱	
$J$	$E_{ACM}$	$E_{ACM}$	$E_{ACM}$	$E_{ACM}$	$E_{ACM}$	$E_{ACM}$	$E_{ACM}$	$E_{ACM}$	$E_{ACM}$	$E_{ACM}$	$E_{ACM}$	$E_{exp}$
$(3/2)_1^-$	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
$(5/2)_1^-$	۱.۱۲	۱.۱۹	۱.۳۶	۱.۶۷	۱.۹۳	۲.۰۶	۲.۱۲	۲.۱	۱.۷۶	۱.۶۶	۱.۵۴	۲.۳۶
$(1/2)_1^-$	۲.۲۴	۲.۳	۲.۴۹	۲.۶۲	۳.۰۵	۳.۴۸	۳.۹	۴.۲۵	۴.۴	۴.۶۴	۴.۸۳	۲.۷۵
$(7/2)_1^-$	۷.۴	۷.۳۸	۷.۳۵	۷.۵	۷.۴۴	۷.۳۴	۷.۳۳	۷.۳۵	۶.۸۳	۶.۹	۶.۹۶	۶.۹۷
$(7/2)_1^+$	۱۲.۱۳	۱۲.۱۵	۱۲.۲۱	۱۱.۱	۱۱.۳۷	۱۱.۶۱	۱۱.۹۸	۱۲.۳۵	۱۱.۹۷	۱۲.۲۳	۱۲.۴۵	۱۱.۶۵
$(5/2)_1^+$	۱۲.۹۵	۱۲.۹	۱۲.۷۶	۱۳.۵۲	۱۳.۱	۵۶.۱۲	۱۲.۱	۱۱.۶۸	۱۰.۸	۱۰.۵۵	۱۰.۳۵	۱۲.۱۹
$(1/2)_1^+$	۱۴.۰۶	۱۴.۰۷	۱۴.۱۱	۱۴.۹۸	۱۴.۹۳	۱۴.۷۶	۱۴.۶۱	۱۴.۴۵	۱۳.۸۵	۱۳.۷۴	۱۳.۶۴	۱۴.۰۱
$(3/2)_1^+$	۱۶.۰۷	۱۶.۰۸	۱۶.۱۱	۱۵.۴۲	۱۵.۶	۱۵.۷	۱۵.۸۲	۱۵.۹	۱۵.۳۸	۱۵.۴۸	۱۵.۵۴	۱۴.۶۶
$(5/2)_1^+$	۱۳.۹۶	۱۳.۹۱	۱۳.۷۴	۱۴.۶۸	۱۴.۱۶	۱۴.۰۷	۱۳.۵۷	۱۳.۰۷	۱۶.۱۲	۱۵.۶۸	۱۵.۳۲	۱۴.۷
$(1/2)_1^+$	۱۷.۵۱	۱۷.۵۴	۱۷.۶	۱۷.۱۱	۱۷.۳۴	۱۷.۴۸	۱۷.۶۱	۱۷.۶۸	۱۷.۱۵	۱۷.۲۳	۱۷.۲۸	۱۷.۰۷

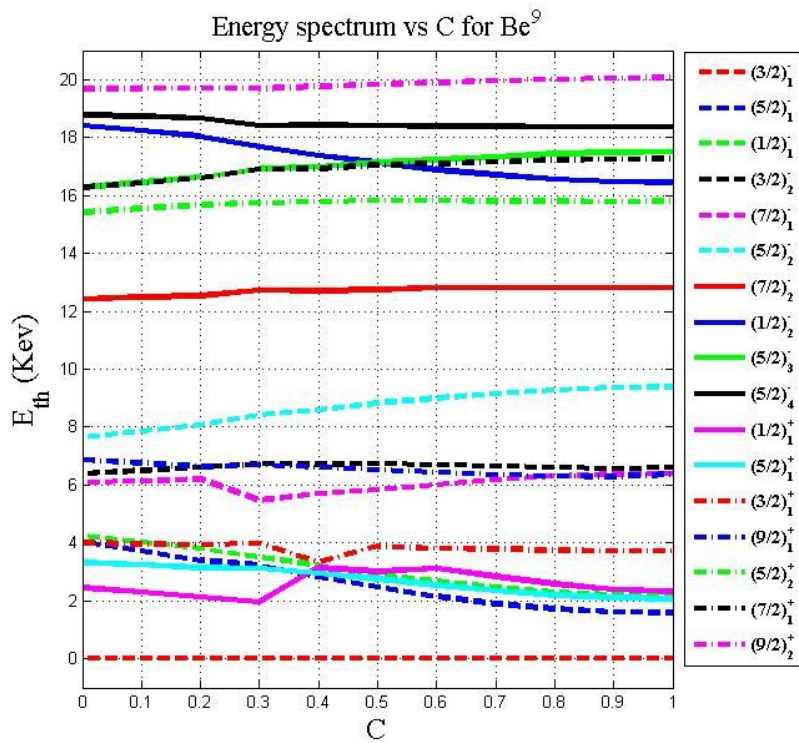
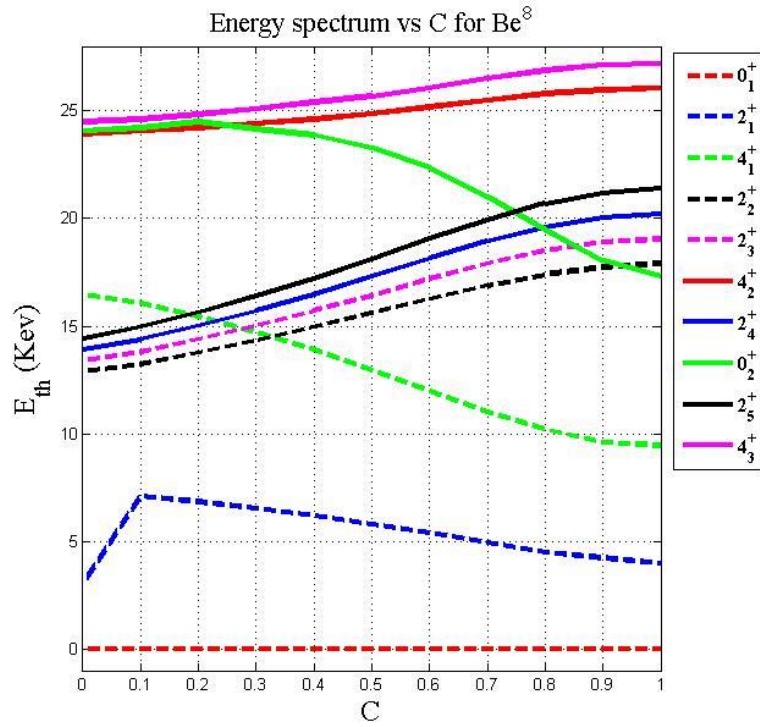
جدول ۴. طیف انرژی هسته  $^{11}B$  حاصل از مدل ACM به ازای مقادیر مختلف پارامتر کنترلی  $c$ 

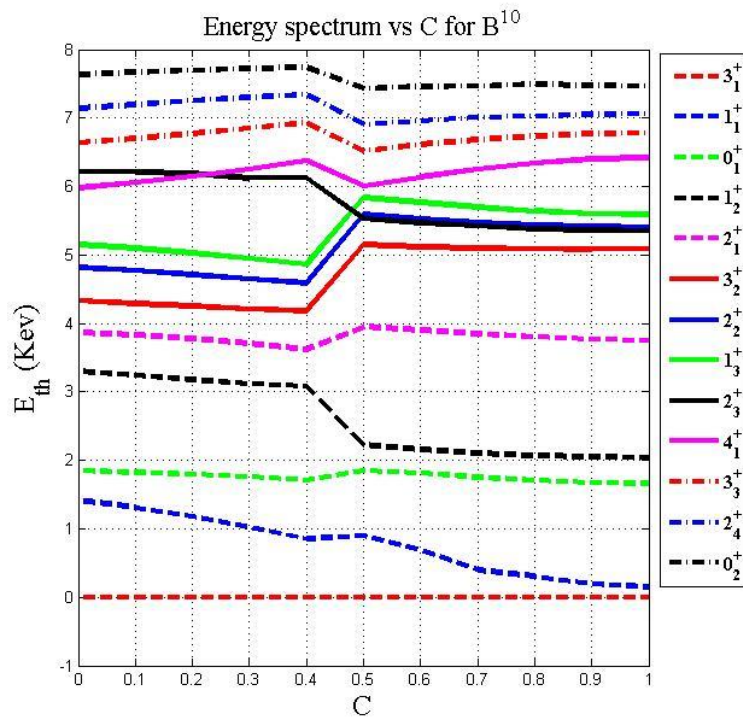
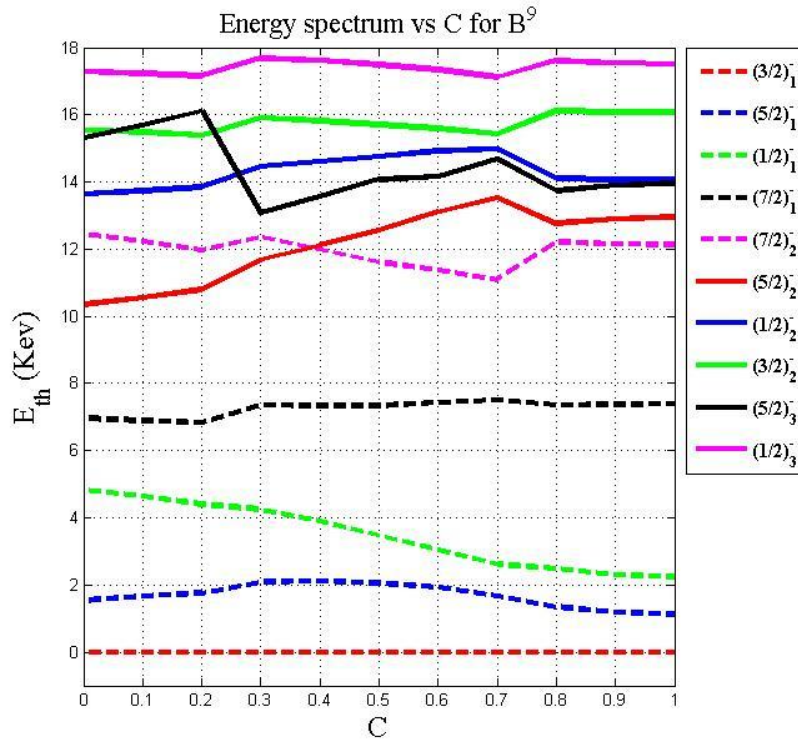
c	۰	۰٫۱	۰٫۲	۰٫۳	۰٫۴	۰٫۵	۰٫۶	۰٫۷	۰٫۸	۰٫۹	۱	
J	$E_{ACM}$	$E_{ACM}$	$E_{ACM}$	$E_{ACM}$	$E_{ACM}$	$E_{ACM}$	$E_{ACM}$	$E_{ACM}$	$E_{ACM}$	$E_{ACM}$	$E_{ACM}$	$E_{exp}$
$3_1^+$	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
$1_1^+$	۰٫۱۵	۰٫۱۹	۰٫۳۱	۰٫۴	۰٫۶۸	۰٫۹	۰٫۸۵	۱٫۰۲	۱٫۱۸	۱٫۳۱	۱٫۴۲	۰٫۷۱
$0_1^+$	۱٫۶۶	۱٫۶۷	۱٫۷۱	۱٫۷۵	۱٫۸۱	۱٫۸۵	۱٫۷۱	۱٫۷۶	۱٫۸	۱٫۸۲	۱٫۸۵	۱٫۷۴
$1_2^+$	۲٫۰۴	۲٫۰۵	۲٫۰۷	۱٫۲	۲٫۱۶	۲٫۲۳	۳٫۰۸	۳٫۱۲	۳٫۱۸	۳٫۲۴	۳٫۳	۲٫۱۵
$2_1^+$	۳٫۷۵	۳٫۷۷	۳٫۸	۳٫۸۵	۳٫۹	۳٫۹۵	۳٫۶۲	۳٫۷۱	۳٫۷۸	۳٫۸۳	۳٫۸۷	۳٫۵۸
$3_2^+$	۵٫۰۸	۵٫۰۸	۵٫۰۹	۵٫۱	۵٫۱۲	۵٫۱۵	۴٫۱۸	۴٫۲۱	۴٫۲۵	۴٫۲۹	۴٫۳۳	۴٫۷۷
$2_2^+$	۵٫۴۱	۵٫۴۲	۵٫۴۴	۵٫۴۸	۵٫۵۳	۵٫۵۹	۴٫۵۹	۴٫۶۵	۴٫۷۱	۴٫۷۷	۴٫۸۲	۵٫۱۶
$1_3^+$	۵٫۵۹	۵٫۶	۵٫۶۴	۵٫۷	۵٫۷۷	۵٫۸۴	۴٫۸۶	۴٫۹۵	۵٫۰۳	۵٫۱	۵٫۱۵	۵٫۱۸
$2_3^+$	۵٫۳۵	۵٫۳۶	۵٫۳۸	۵٫۴۲	۵٫۴۷	۵٫۵۳	۶٫۱۲	۶٫۱۲	۶٫۱۹	۶٫۲۱	۶٫۲۱	۵٫۹۲
$4_1^+$	۶٫۴۲	۶٫۴	۶٫۳۴	۶٫۲۵	۶٫۱۴	۶٫۰۱	۶٫۳۸	۶٫۲۵	۶٫۱۵	۶٫۰۶	۵٫۹۸	۶٫۰۲
$3_3^+$	۶٫۷۸	۶٫۷۷	۶٫۷۴	۶٫۶۸	۶٫۶۱	۶٫۶	۶٫۹۳	۶٫۸۵	۶٫۷۷	۶٫۷	۶٫۶۴	۷٫۰
$2_4^+$	۷٫۰۶	۷٫۰۵	۷٫۰۳	۷٫۰۱	۶٫۹۶	۶٫۹	۷٫۳۴	۷٫۳	۷٫۲۶	۷٫۱۹	۷٫۱۴	۷٫۴۷
$0_2^+$	۷٫۴۷	۷٫۴۸	۷٫۴۹	۷٫۴۷	۷٫۴۶	۷٫۴۳	۷٫۷۴	۷٫۷۲	۷٫۷	۷٫۶۷	۷٫۶۳	۷٫۵۶

خطای میانگین مربعات ( $\sigma$ ) طیف انرژی محاسبه شده و مقادیر تجربی بصورت تابعی از پارامتر کنترلی  $c$  برای این هسته ها در شکل (۲) نشان داده شده است. مقدار  $\sigma$  از رابطه زیر بدست می آید:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (E_{th}^{(i)} - E_{exp}^{(i)})^2}{n}}$$

که در آن  $n$  تعداد ترازها می باشد.

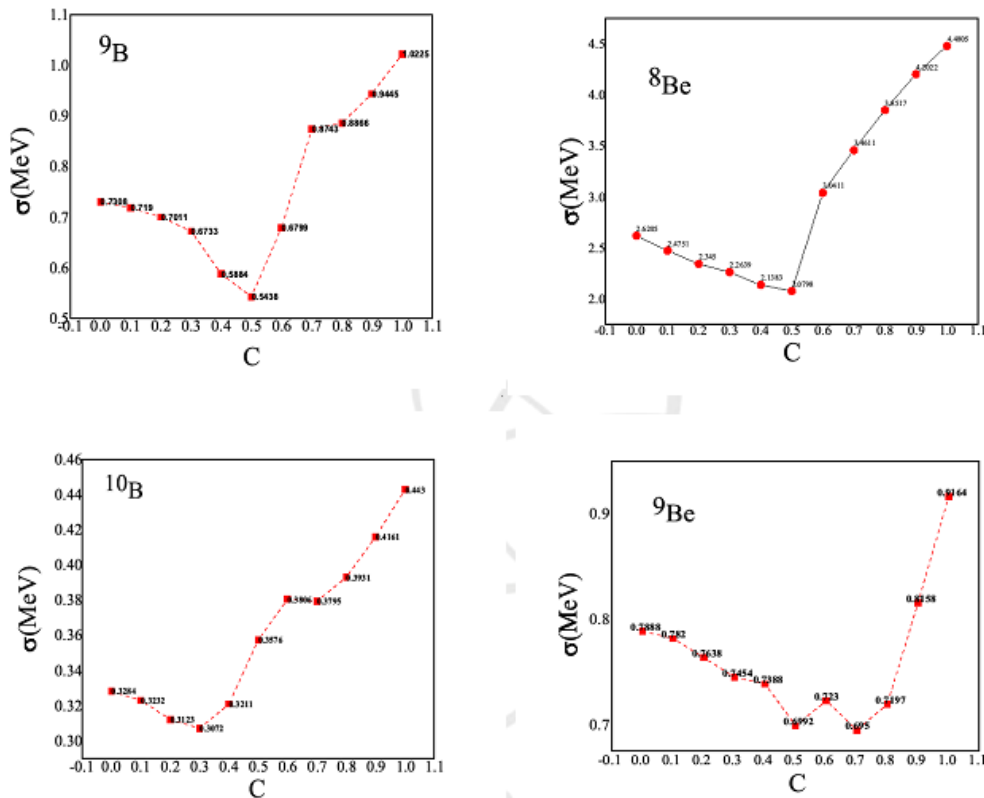




شکل ۱. سطح انرژی به عنوان تابعی از پارامتر کنترل  $C$  برای هسته های دو خوشه ای

نتایج محاسبات عددی نشان می دهد که هسته های دو خوشه دارای ویژگی های ارتعاشی هستند. از شکل (۱) به وضوح مشاهده می شود که در این حالت تک فرمیون، سیستم را به سمت تغییر شکل سوق می دهد. مطابق شکل (۱) شکستگی ها

در طیف‌های انرژی بر حسب  $C$  گویای این مطلب است. برای نشان دادن چگونگی تغییر سطح انرژی به عنوان تابعی از پارامتر کنترل  $C$ ، میزان انرژی به عنوان تابعی از  $C$  برای هسته های  ${}^9\text{B}$ ،  ${}^8\text{Be}$ ،  ${}^{10}\text{B}$  و  ${}^9\text{Be}$  در شکل (۲) نشان داده شده است. شکل (۳) نشان می‌دهد که چگونه سطح انرژی به عنوان تابعی از پارامتر کنترلی  $C$  از یک حد تقارن دینامیکی به حد دیگر تحول می‌یابد. از شکل‌ها دیده می‌شود که گذار در تقاطع تراز رخ میدهد، به خصوص در محدوده  $C \geq 0.4$  برای  ${}^8\text{Be}$ .



شکل ۲. خطای میانگین مربعات به عنوان تابعی از پارامتر کنترل  $C$  برای هسته های دو خوشه

## ۲.۴ مقدار انتظاری تعداد بوزون

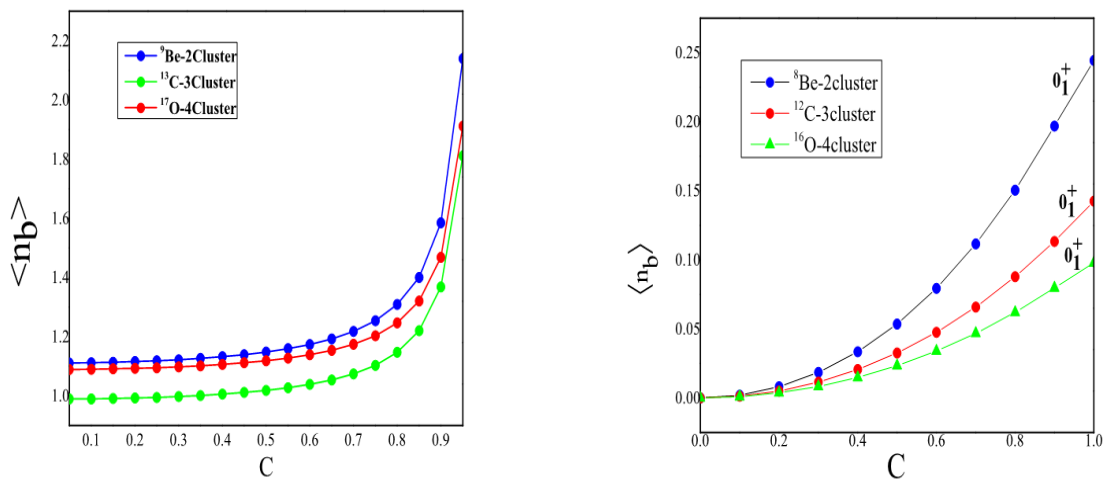
یکی دیگر از پارامترهایی که در اینجا در نظر می‌گیریم مقادیر انتظاری عملگرهای تعداد بوزونها میباشد. مقادیر انتظاری  $n_b$  میتواند به عنوان یک مشاهده پذیر مهم گذار فاز مطرح شود. بنابراین، ما این مقادیر را برای نشان دادن رفتار گذار فاز محاسبه کردیم. برای نشان دادن گذار فاز، در اینجا مقدار انتظاری  $n_b$  را به عنوان پارامتر نظم با توجه به پارامترهای کنترلی برای دو خوشه در نظر می‌گیریم:

$$\langle n_b \rangle = \frac{\langle \psi | n_b | \psi \rangle}{N} \quad (33)$$

به منظور به دست آوردن  $\langle n_b \rangle$  هسته های دو خوشه ای، ما اثر  $S_n$  را روی ویژه حالت محاسبه می‌کنیم، نتیجه می‌شود:

$$\langle n_b \rangle = \frac{\nu[\Lambda_i - c_s^* \Lambda_i + (\sum_{i=1}^k x_i^{-1} - k c_s^*)]}{N(c_b^* - c_s^*)} - \frac{1}{N} \quad (34)$$

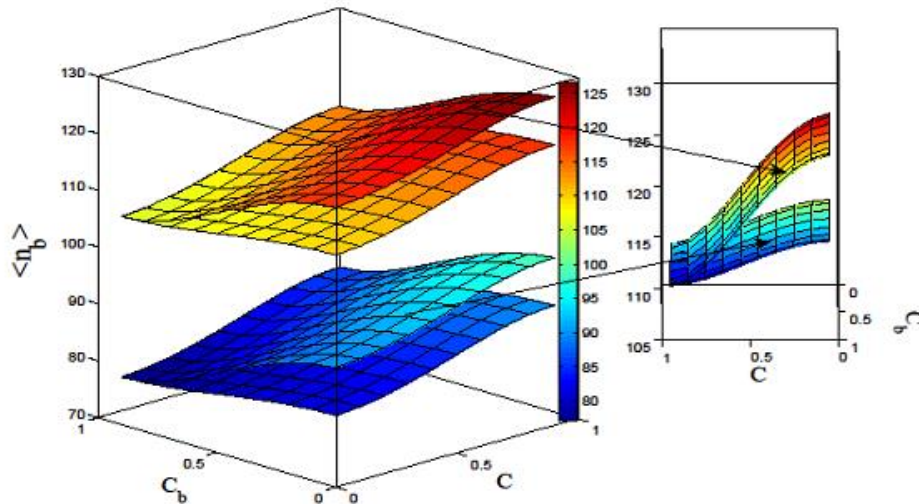
برای محاسبه مقادیر انتظاری عملگر تعداد بوزون  $b$ ، باید ریشه های مناسب را انتخاب کنیم. شکل (۳) مقادیر انتظاری عملگر تعداد بوزون  $b$  را برای پایین ترین حالت هسته های زوج (شکل سمت چپ) و هسته های فرد (شکل سمت راست) به عنوان تابعی از پارامتر کنترلی برای  $N = 10$  بوزون نشان می دهد.



شکل ۳. مقادیر انتظاری عملگر تعداد بوزون برای پایین ترین حالت به عنوان تابعی از پارامتر کنترلی  $c$  برای  $N = 10$ .

تغییر ناگهانی در این کمیت ها گذار فاز را نشان می دهد. شکل ها نشان می دهند که مقادیر انتظاری تعداد بوزن های برداری تقریباً برای یک حد، ثابت باقی مانده و برای حد دیگر به سرعت تغییر می کنند. از شکل (۳) دیده می شود که به دلیل وجود فرمیون، این گذار برای هسته های  $A$ -زوج با شیب بیشتری رخ می دهد، در حالیکه برای هسته های  $A$ -فرد شیب کمتر می باشد. شکل (۴) مقادیر انتظاری را برای عملگر تعداد بوزون  $b$  برای پایین ترین حالت های زوج-زوج به عنوان تابعی از پارامترهای کنترلی  $c$  و  $c_b$  نشان می دهد.





شکل ۴. مقادیر انتظاری عملگر تعداد بوزون برداری برای کمترین حالتها به عنوان تابعی از پارامترهای کنترل  $C$  و  $C_b$  برای  ${}^A\text{Be}$

ما همچنین دریافتیم که با اضافه کردن ذره فرد با توجه به مورد یکسان، موقعیت نقطه بحرانی تغییر کرده است. به عنوان یک نتیجه، رفتار سیستم های فرد-فرد و زوج-زوج در نقاط بحرانی مربوطه تقریباً مشابه است.

## ۵. نتیجه گیری

در این پژوهش، گذر فاز مدلهای مبتنی بر ACM را برای هسته های  ${}^A\text{Be}$ ،  ${}^B\text{Be}$ ،  ${}^B$  و  ${}^A\text{B}$  در ناحیه گذار  $U(3) \leftrightarrow O(4)$  مطالعه کردیم. برای اینکار از هامیلتون گذار حل پذیری که مبتنی بر جبر  $SU(1,1)$  است، استفاده کردیم. اعتبار پارامترهای ارائه شده در چارچوب خوشه-IBM و خوشه-IBFM مورد بررسی قرار گرفته است. مشاهده میشود که بین نتایج ارائه شده و داده های تجربی توافق خوبی وجود دارد. نتایج به دست آمده در این مطالعه تأیید میکند که روش ACM برای بررسی هسته های زوج-زوج، فرد-فرد و A فرد قابل استفاده است. ما در اینجا یک تحلیل از گذار فاز کوانتومی در یک سیستم متشکل از N بوزون و یک فرمیون ارائه داده ایم و نشان داده ایم که افزودن یک فرمیون مقدار بحرانی را که در آن مرحله گذار رخ میدهد تا حد زیادی تغییر می دهد. مطالعات ما اهمیت هسته های فرد را به عنوان نشانه های لازم برای توصیف وقوع گذار فاز و تعیین موقعیت دقیق نقطه بحرانی را تأیید می کند.

## ۶. مراجع

1. F. Iachello and A. Arima, *The Interacting Boson Model* (Cambridge U. Press, Cambridge, 1987).

2. F. Iachello and R. D. Levine, *Algebraic Theory of Molecules*, (Oxford U. Press, Oxford, 1995).
3. R. Bijker and F. Iachello, *Nucl. Phys. A* **957** (2017) 154.
4. J. A. Wheeler, *Phys. Rev.* **52** (1937) 1083.
5. L. R. Hafstad, E. Teller, *Phys. Rev.* **54** (1938) 681.
6. D. M. Dennison, *Phys. Rev.* **96** (1954) 378.
7. S. L. Kameny, *Phys. Rev.* **103** (1956) 358.
8. K. Wildermuth, T. Kanellopoulos, *Nucl. Phys. A* **7** (1958) 150.
9. W. von Oertzen, M. Freer, Y. Kanada-En'yo, *Phys. Rep.* **432** (2006) 43.
10. Y. Kanada-En'yo, *Prog. Theor. Phys.* **117** (2007) 655.
11. M. Chernykh, H. Feldmeier, T. Neff, P. von Neumann-Cosel, A. Richter, *Phys. Rev. Lett.* **98** (2007) 032501.
12. Y. Funaki, H. Horiuchi, W. von Oertzen, G. Roepke, P. Schuck, A. Tohsaki, T. Yamada, *Phys. Rev. C* **80** (2009) 064326.
13. E. Epelbaum, H. Krebs, T.A. Lähde, D. Lee, U.-G. Meißner, G. Rupak, *Phys. Rev. Lett.* **112** (2014) 102501.
14. R. Bijker, F. Iachello, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **110** (2020) 103735.
15. F. Iachello and A. D. Jackson, *Phys. Lett. B* **108** (1982) 151.
16. A. Arima and F. Iachello, *Ann. Phys. (NY)* **99** (1976) 253.
17. F. Iachello and R.D. Levine, *J. Chem. Phys.* **77** (1982) 3046.
18. F. Iachello, *Nucl. Phys. A* **396** (1983) 233.

19. H. J. Daley and F. Iachello, *Phys. Lett. B* **131** (1983) 281.
20. F. Iachello, N. C. Mukhopadhyay and L. Zhang, *Phys. Rev. D* **44** (1991) 898.
21. F. Iachello and D. Kusnezov, *Phys. Rev. D* **45** (1992) 4156.
22. R. Bijker, F. Iachello and A. Leviatan, *Ann. Phys. (N.Y.)* **284** (2000) 89.
23. P.O. Hess, L. J. Chávez-Nuñez, *EPJ A*. 57 (2021) 146.
24. D. S. Lohr-Robles, G. E. Morales-Hernández, E. Lopez-Moreno, P.O. Hess, *Nucl. Phys. A*. 1030 (2023) 122589.
25. W. von Oertzen, *Z. Phys. A* **354** (1996) 37.
26. B. Imanishi, W. von Oertzen, *Phys. Rep.* **155** (1987) 29.
27. W. von Oertzen, H. Bohlen, *Phys. Rep.* **19** (1975) 1.
28. R. Bijker and F. Iachello, *Phys. Rev. Lett* **112** (2014) 152501.
29. T. Neff, H. Feldmeier, and R. Roth, *Nucl. Phys. A* **752** (2005) 321.
30. V. Della Roccaa, R. Bijker, F. Iachello, *Nucl. Phys. A* **966** (2017) 158.
31. R. Bijker and F. Iachello, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **110** (2020) 103735.
32. R. Bijker, *Phys. Scr.* **91** (2016) 073005.
33. V. Dell Rocca, F. Iachello, *Nucl. Phys. A* **973** (2018) 1.
34. A. Leviathan and M. W. Kirson, *Ann. Phys (N. Y.)* **188** (1988) 142.
35. O. S. Roosmalen, *Algebraic Description of nuclear and Molecular Rotation-Vibration spectra* (Pd.D. Thesis, Groningen, The Netherlands) (1982).
36. F. Pan, J. Draayer, *Nucl. Phys. A* **636** (1998) 156.

37. F. Pan, X. Zhang, J. Draayer, *J. Phys. A* **35** (2002) 7173.
38. F. Iachello, *Chem. Phys. Lett.* **78** (1981) 581.
39. O. S. Van Roosmalen, F. Iachello, R. D. Levine, and A. E. L. Dieperink, *J. Chem. Phys.* **79** (1983) 2515.
40. E. Santopinto, R. Bijker, and F. Iachello, *J. Math. Phys.* **37** (1996) 2674.
41. F. Pan and Y.F. Cao, *J. Math. Phys.* **29** (1988) 2384.
42. S. Okabe, Y. Abe, H. Tanaka, *Prog. Theor. Phys.* **57** (1977) 866.
43. S. Okabe, Y. Abe, *Prog. Theor. Phys.* **61** (1979) 1049.
44. F. Iachello, A. Arima, *Phys. Lett. B* **53** (1974) 309.
45. D.R. Tilley et al, *Nucl. Phys. A* **745** (2004) 155.
46. F. Ajzenberg-seloven, *Nucl. Phys. A* **248** (1975) 1.
47. F. Ajzenberg-seloven, *Nucl. Phys. A* **152**, (1970) 1.
48. D.R. Tilley, H.R. Weller, CM. Cheves, *Nucl. Phys. A* **565** (1993) 1.
49. F. Ajzenberg-seloven, *Nucl. Phys. A* **375** (1982) 1.

## Quantum phase transition in even and odd nuclei by using algebraic two-cluster model

Maryam Ghapanvari<sup>\*,1</sup>, Narjes Amiri<sup>2</sup>, Mohammad ali Jafarizadeh<sup>3</sup>, Masoud Seidi<sup>4</sup>

<sup>1,\*</sup>Institute of Plasma and Nuclear Fusion, Institute of Nuclear Science and Technology, Tehran, Iran

<sup>2</sup>Department of Nuclear Physics, Faculty of Physics, University of Tabriz, Tabriz, Iran

<sup>3</sup>Department of Theoretical Physics, Faculty of Physics, University of Tabriz, Tabriz, Iran

<sup>4</sup>Department of Physics, Faculty of Science, Ilam University, Ilam, Iran

**Abstract:** "Algebraic cluster model" (ACM) is used to describe the relative motion of the cluster by considering vibrational and rotational degrees of freedom. In this research, using the two-body ACM Hamiltonian, the quantum phase transition in the transition region  $U(3) \leftrightarrow O(4)$  for odd nuclear structures such as:  ${}^9\text{Be}$ ,  ${}^8\text{Be}$ ,  ${}^9\text{B}$ , and  ${}^{10}\text{B}$  has been investigated. The energy surfaces, the expectation value of the boson number operator as a function of the control parameters of the calculated Hamiltonian, and also the effect of pairing the odd nucleon with the even-even boson nucleus at the critical point are discussed. Experimental data confirm the numerical results.

**Keywords:** Algebraic Cluster Model, vibrational and rotational degrees of freedom, critical point