

## بررسی تاثیر ایزواسپین در طیف مولتی فرکتالی هسته‌های اتمی

واحد رزازی<sup>۱</sup>، سهراب بهنیا<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup> گروه فیزیک، واحد ارومیه، دانشگاه آزاد اسلامی، ارومیه، ایران

<sup>۲</sup> گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه صنعتی ارومیه، ارومیه، ایران

### چکیده

اطلاعات مقاله

بررسی توزیع آماری ترازهای انرژی و توابع موج هسته اتمی به عنوان یک سیستم بس ذره‌ای برای مطالعه واکنشهای گوناگون و ساختار هسته‌ای ضروری می‌باشد. در این مطالعه رویکرد متفاوتی برای بررسی تاثیر ایزواسپین در ساختار هسته اتمی بر مبنای طیف مولتی فرکتالی توابع موج ارائه شده است. این تحلیل با نتایج بدست آمده توسط طول جایگزیدگی و تحلیل آماری حاصل از توزیع ترازهای انرژی بر مبنای تئوری آشوب کوانتومی مقایسه شده و مورد تایید واقع گردیده است. بدین منظور  $^{46}\text{Ca}$  با داشتن نوترون در ترازهای ظرفیت و ایزوتوپ مجاور آن  $^{46}\text{Sc}$  که با جایگزین شدن یک پروتون بجای نوترون در تراز ظرفیت ایزواسپین متفاوتی دارد، برای مطالعه بر مبنای مدل پوسته‌ای هسته انتخاب شده اند. ویژه مقادیر انرژی و دامنه توابع موج سیستم توسط کد محاسباتی NuShellX قابل دستیابی می‌باشد. این مطالعه رویکرد متفاوتی را در بررسی ساختار هسته ای و مدل استاندارد ایجاد میکند.

**واژگان کلیدی:** طیف مولتی فرکتال، طول جایگزیدگی، تابع توزیع برودی، ایزواسپین، ساختار هسته‌ای.

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۱۰/۲۸

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۱۲/۲۰

تاریخ چاپ: ۱۴۰۳/۱۲/۲۵

شاپای چاپی: 2588-493x

شاپای الکترونیکی: 2588-4921

\* نویسنده مسئول

va.razzazi@iau.ac.ir



در مطالعات انجام یافته در فضای ظرفیت  $(d_{5/2}, d_{3/2}, sd)$  هسته یک رفتار آشوبی خیلی قوی نشان داده است ولی در فضای ظرفیت  $pf$   $(f_{7/2}, f_{5/2}, p_{1/2}, p_{3/2})$  این رفتار کمی متفاوت به نظر می‌رسد [6]. تابع توزیع آماری نزدیکترین فاصله<sup>۱</sup> (NNS) از ساده ترین پیشگویی های تئوری ماتریسهای تصادفی<sup>۲</sup> می‌باشد [7].

ویگنر-دایسون<sup>۳</sup> برای سیستم‌های فیزیکی انتگرال ناپذیر رفتار آشوبناک که از توزیع آنسامبل گاوسی<sup>۴</sup> پیروی می‌کند، پیشگویی کرده است. سیستم‌های انتگرال ناپذیر از تابع توزیع پواسونی پیروی می‌کنند [8]. با وجود این در بسیاری از سیستم‌ها از جمله هسته اتمی رفتاری مابین این دو حالت دیده شده است. برای تحلیل چنین سیستم‌هایی از تابع توزیع

### مقدمه

اطلاعات آماری حاصل از طیف ترازهای انرژی در سیستم هسته ای به عنوان یک سیستم بس ذره‌ای، اطلاعات زیادی را در مورد ساختار هسته ای فراهم می‌کند [1,2]. همچنین تحلیل توابع موج نیز می‌تواند در تایید نتایج حاصل مبنی بر آشوبناک بودن سیستم مفید باشد [3,4]. بسیاری از اطلاعات میکروسکوپی هسته ها از قبیل طیف ترازهای انرژی و توابع موج، توسط مدل پوسته ای هسته‌ای می‌تواند فراهم شود [5].

<sup>3</sup> Wigner-Dyson

<sup>1</sup> Nearest neighbor statistical distribution

<sup>4</sup> Gaussian orthogonal ensemble

<sup>2</sup> Random matrix theory

## ۲- تحلیل ترازهای انرژی

یکی از روشهایی که برای تحلیل آماری ترازهای انرژی سیستم‌های کوانتومی مطرح می‌باشد، تئوری ماتریسهایی تصادفی است که در ۱۹۵۰ توسط ویگنر، دایسون و مهمتا<sup>۸</sup> توسعه داده شد [8,9,12]. بخصوص این تئوری در بررسی طیف پیچیده هسته‌ای بسیار مورد توجه قرار گرفت است [12]. در این تئوری تابع توزیع آماری نزدیکترین فاصله (NNS) یکی از روشهای رایج برای تحلیل ترازهای انرژی می‌باشد. پس از حل معادله (۲) و بدست آوردن ویژه مقادیر انرژی تابع توزیع انرژی  $P(s)$  را محاسبه می‌کنیم که در آن  $S_n = E_n - E_{n-1}$  نزدیکترین فاصله توزیع ترازهای انرژی می‌باشد. در سیستمهای منظم، تابع توزیع  $P(s)$  از توزیع پواسونی به فرم زیر پیروی می‌کند:

$$P(s) = \exp(-s) \quad (3)$$

اما در سیستمهای نامنظم و آشوبناک این تابع توزیع از توزیع ویگنری پیروی میکند و  $P(s) \sim s^{-\nu}$  می‌باشد و بسته به تقارن سیستم در یکی از سه حالت  $GOE, GUE, GSE$  قرار میگیرد که به ترتیب  $\nu = 1, 2, 4$  می‌باشد [15]. در بررسی بسیاری از سیستمهای واقعی مشاهده شد که بسیاری از آنها نه کاملاً انتگرال پذیر هستند و نه کاملاً آشوبناک و رفتاری بینابین دارند. هسته اتمی نیز جزو چنین سیستمهایی می‌باشد که برای بررسی چنین سیستمهایی از تابعهای توزیع مختلفی استفاده میشود که از جمله آنها تابع توزیع برودی می‌باشد [15,16,17]. تابع توزیع برودی مطابق رابطه زیر می‌باشد:

$$P(s) = (\omega + 1) a_\omega s^\omega \exp(-a_\omega s^{\omega+1})$$

$$a_\omega = \left[ \Gamma\left(\frac{\omega+2}{\omega+1}\right) \right]^{\omega+1}$$

$$\Gamma(\omega) = \int_0^\infty x^{\omega-1} e^{-x} dx \quad (4)$$

برودی<sup>۵</sup> استفاده می‌شود [9]. در تحلیل بیشتر سیستم، بررسی رفتار توابع موج با بکارگیری طول جایگزیدگی<sup>۶</sup> و نیز طیف مولتی فرکتالی<sup>۷</sup> امکانپذیر می‌باشد [10,11]. در این مطالعه تاثیر ایزواسپین در ساختار هسته‌ای مورد بررسی قرار گرفته است. بدین منظور  $^{46}\text{Ca}$  و ایزوتوپ  $^{46}\text{Sc}$  که در مجاورت کلسیم قرار گرفته، انتخاب شده و  $^{40}\text{Ca}$  به عنوان هسته مرکزی در نظر گرفته شده است.

## ۱- مدل تئوری هسته‌ای

هسته اتمی به مانند یک سیستم بس ذره‌ای شناخته شده است. معادله شرودینگر این سیستم با  $n$  ذره که هر کدام دارای جرم  $m$  بوده و تحت یک پتانسیل مرکزی  $U_i$  قرار دارند و در برهمکنش باهم تحت پتانسیل دو ذره ای  $V_{ik}$  هستند به صورت زیر می‌باشد:

$$H |\psi\rangle = E |\psi\rangle, \quad (1)$$

هدف حل این معادله شرودینگر می‌باشد. بدین منظور هامیلتونی حاکم بر مدل لایه‌ای را بر اساس عملگرهای کوانتومی برای برهمکنش دودره‌ای تعریف می‌کنیم و از برهمکنش سه ذره‌ای و بیشتر صرف نظر می‌کنیم [12]. هامیلتونی حاکم بر مدل پوسته‌ای هسته بر اساس عملگرهای کوانتومی به فرم زیر می‌باشد:

$$H = \sum_i \epsilon_i a_i^\dagger a_i + \frac{1}{4} \sum_{i,j,k,l} \langle ij|V|kl \rangle a_i^\dagger a_j^\dagger a_k a_l, \quad (2)$$

$\epsilon_i$  انرژی ذره منفرد،  $a_i^\dagger, a_i$  عملگرهای خلق و نابودی، اندیس-های  $i, j, k, l$  اعداد کوانتومی هر ذره و  $\langle ij|V|kl \rangle$  عناصر ماتریسی برهمکنش دودره‌ای ذرات واقع در لایه‌های ظرفیت می‌باشند. عناصر ماتریسی این هامیلتونی برای جمله اول عناصر ماتریسی تک ذره‌ای (SPE) و برای جمله دوم عناصر ماتریسی دودره‌ای (TBME) نامیده می‌شوند. در این هامیلتونی، جمله اول خطی می‌باشد ولی جمله دوم رفتار به شدت غیر خطی دارد [13]. عملیات قطری کردن و حل این ماتریس به دلیل بالا بودن ابعاد آن توسط کد محاسباتی NuShellx انجام میگیرد [14]. با تغییراتی که در این برنامه صورت گرفته شده علاوه بر ویژه مقادیر انرژی، ویژه توابع موج نیز قابل محاسبه شده است.

<sup>8</sup> Wigner-Dyson-Mehta

<sup>5</sup> Brody distribution

<sup>6</sup> Localization length

<sup>7</sup> Multifractal spectrum

و طول جایگزیدگی به صورت تابعی از انرژی از رابطه زیر قابل محاسبه است:

$$l_h(E) = \exp[S_E^{info}] / 0.48d \quad (8)$$

در سیستمهای آشوبناک برای آنسامبل GOE.

بنابراین  $l_h(E) = 1$  برای سیستمهای آشوبناک خواهد بود [19,20].  
 $S_E^{info} = \ln(0.48d)$  و مستقل از انرژی خواهد بود.

### ۳-۲ تحلیل توابع موج بر اساس طیف مولتی فرکتال

تحلیل مولتی فرکتال یکی از روشهای مفید برای مطالعه سیستمهای دینامیکی غیر خطی می باشد [21]. در این تحلیل ما فرض می کنیم که  $|\psi_i|^2$  تابع موج نرمالیزه شده ذره در سیستم  $d$  بعدی به حجم  $L^d$  در سایت  $i$ th می باشد. احتمال پیدا کردن ذره در جعبه  $k$ th بصورت زیر می باشد:

$$\mu_k(l) = \sum_i |\psi_i|^2 \quad (9)$$

$k = 1, \dots, N_l$

$N_l$  تعداد جعبه ها با سایز  $l$  و اندازه حرکت  $q$ th از  $\mu_k(l)$  به صورت زیر تعیین می شود:

$$P_q(l) = \sum_{k=1}^{N_l} \mu_k^q(l) \quad (10)$$

$P_q$  رفتار نمایی متناسب با  $\lambda = \frac{1}{L}$  دارد:

$$P_q(\lambda) \propto \lambda^{\tau(q)} \quad (11)$$

که  $\tau(q)$  نماینده توده جرم می باشد:

$$\tau(q) = \begin{cases} d(q-1) & \text{حالت منظم} \\ \cdot & \text{حالت نامنظم} \\ D_q(q-1) & \text{حالت گذار} \end{cases}$$

$\omega$  پارامتر برودی نامیده می شود که برای  $\omega=0$  تابع توزیع ترازهای انرژی پواسونی و برای  $\omega=1$  تابع توزیع ترازهای انرژی از توزیع ویگنری پیروی میکند و سیستم آشوبناک کامل است.

### ۳. تحلیل توابع موج

توجه به چگونگی گسترش توابع موج نیز میتواند اطلاعات خوبی در رفتار سیستم کوانتومی به ما ارائه دهد. این بررسی به روشهای مختلفی انجام می گیرد که از آن جمله میتوان به اندازه گیری طول جایگزیدگی بر اساس آنتروپی سیستم اشاره کرد. همچنین طیف مولتی فرکتالی سیستم در تایید این نتایج روش مورد توجه می باشد.

### ۳-۱ تحلیل توابع موج بر اساس طول جایگزیدگی

میزان توزیع توابع موج در فضا میتواند نحوه رفتار سیستم را به خوبی معرفی کند [18]. سیستمی که توابع موج آن در فضا گسترش یافته اند، نمونه ای از سیستم آشوبناک می باشد. در سیستم های انتگرال پذیر، توابع موج سیستم جایگزیده خواهند بود [19].

برای محاسبه طول جایگزیدگی ابتدا ویژه توابع هامیلتونی  $H$  سیستم را محاسبه میکنیم. توابع موج سیستم بر اساس بردارهای پایه سیستم  $|k\rangle = \alpha_{K_1}^\dagger \dots \alpha_{K_N}^\dagger |0\rangle$  که ویژه توابع  $H_0$  هستند نمایش داده می شوند:

$$H|\alpha\rangle = E^\alpha |\alpha\rangle \quad (5)$$

$$H_0|k\rangle = E_k^0 |k\rangle$$

که خواهیم داشت :

$$|\alpha\rangle = \sum_k C_k^\alpha |k\rangle \quad (6)$$

آنتروپی اطلاعات سیستم بر اساس دامنه توابع موج  $C_k^\alpha$  قابل محاسبه است:

$$S_E^{info} = -\sum_k |C_k^\alpha|^2 \ln |C_k^\alpha|^2 \quad (7)$$

طیف  $f(\alpha)$  از نمایه های  $\tau(q)$  توسط انتقال لژاندر<sup>۹</sup> بدست می‌آید:

$$\alpha(q) = \frac{d\tau(q)}{dq} \quad (13)$$

$$q = f'(\alpha)$$

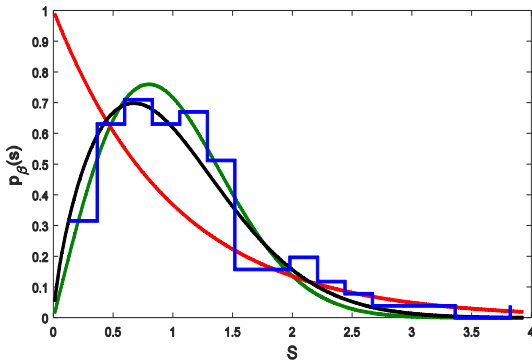
$$f(\alpha) \equiv f(\alpha_q) = \alpha_q q - \tau(q)$$

طیف  $f(\alpha)$  تابعی

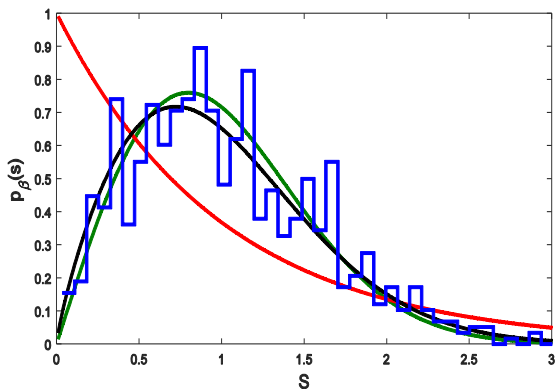
از  $\alpha$  است با یک ماکزیمم در  $d_0$  که بعد توپولوژیکال سیستم می‌باشد. منحنی  $f(\alpha)$  به عنوان یک ناحیه بین  $\alpha_+$  و  $\alpha_-$  می‌باشد که با مقایسه پهنای این طیف می‌توانیم رفتار دینامیکی سیستم را تحلیل کنیم. برای سیستم منظم و جایگزیده طیف دارای پهنای وسیعی می‌باشد که این رفتار منطبق با رفتار پواسونی طیف انرژی سیستم می‌باشد. در سیستمهایی با رفتار نامنظم و طیف ویگنری طیف مولتی فرکتال سیستم باریکتر خواهد بود [22,23].

### ۳. بحث و نتیجه گیری

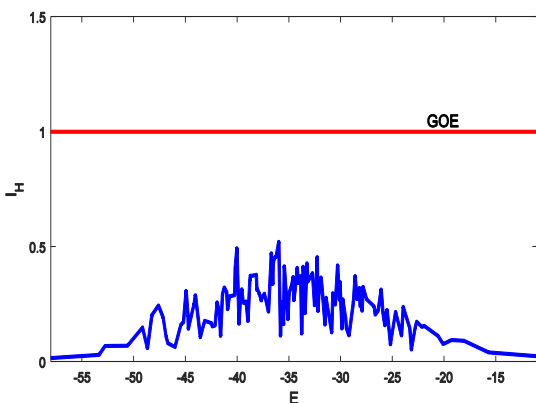
برای مطالعه تاثیر برهمکنش بین ذرات فضای ظرفیت بر ساختار هسته ای، ایزوتوپ های  $^{46}\text{Ca}$  و  $^{46}\text{Sc}$  را برای این مطالعه انتخاب می‌کنیم. ترازهای ظرفیت در این محاسبه ترازهای ( $f_{7/2}$ )  $f_{5/2}$ ,  $p_{1/2}$ ,  $p_{3/2}$  می‌باشد که فضای ظرفیت pf نامیده می‌شود و هسته مرکزی در این محاسبات  $^{40}\text{Ca}$  در نظر گرفته شده است.  $^{46}\text{Ca}$  در ترازهای ظرفیت خود فقط دارای ۶ نوترون می‌باشد در حالیکه ایزوتوپ  $^{46}\text{Sc}$  که در مجاورت کلسیم قرار دارد دارای ۵ نوترون و ۱ پروتون می‌باشد، که منجر به تفاوت ایزواسپین در این هسته‌ها شده است. با محاسبه ویژه مقادیر و ویژه توابع هامیلتونی فرمول ۲، توسط برنامه محاسباتی NuShellX به تحلیل و بررسی رفتار سیستم می‌پردازیم [14]. با محاسبه تابع توزیع نزدیکترین فاصله NNS توسط تابع توزیع برودی می‌توانیم تفاوت رفتاری را در این ایزوتوپها مشاهده کنیم. پارامتر برودی  $\omega$  می‌تواند میزان آشوبناک بودن سیستم را تعیین کند. در  $^{46}\text{Ca}$  این پارامتر ۰٫۶۷ بدست آمده است و نمودار توزیع طیف انرژی حاصل (نمودار آبی شکل ۱) تمایل سیستم به توزیع پواسونی را نشان میدهد. رفتار  $^{46}\text{Sc}$  بسیار متمایل به رفتار ویگنری بوده و پارامتر برودی ۰٫۸۹ محاسبه شده است (شکل ۲).



شکل ۱. نمودار توزیع ترازهای انرژی: نمودار سبز: توزیع ویگنری نمودار قرمز: توزیع پواسونی نمودار سیاه: توزیع برودی نمودار آبی: هیستوگرام حاصل از توزیع طیف انرژی  $^{46}\text{Ca}$ .



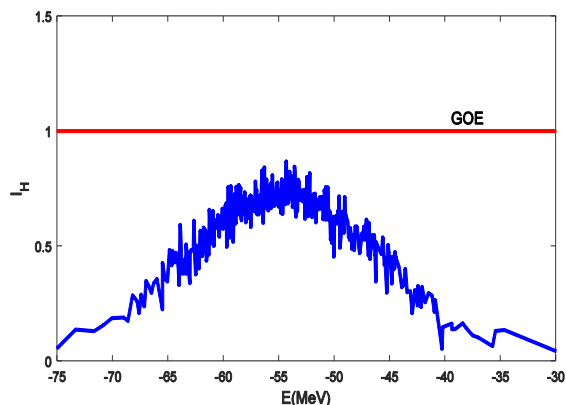
شکل ۲. نمودار توزیع ترازهای انرژی: نمودار سبز: توزیع ویگنری نمودار قرمز: توزیع پواسونی نمودار سیاه: توزیع برودی نمودار آبی: هیستوگرام حاصل از توزیع طیف انرژی  $^{46}\text{Sc}$ .



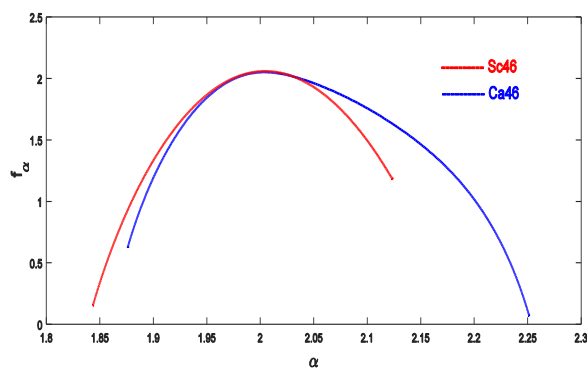
شکل ۳. نمودار طول جایگزیدگی بر حسب تابعی از انرژی  $^{46}\text{Ca}$ .

<sup>9</sup> Legendre transformation

- (5) B. A. Brown, B. Wildenthal, Status of the nuclear shell model, *Annual Review of Nuclear and Particle Science* 38 (1) (1988) 29.
- (6) Gómez, J. M. G., et al, Shell-Model studies of chaos and statistical properties in nuclei, *Journal of Physics: Conference Series*. Vol. 580. No. 1. IOP Publishing, 2015.
- (7) Assmann, Marc, et al, Quantum chaos and breaking of all anti-unitary symmetries in Rydberg excitons, *Nature materials* 15.7 (2016) 741.
- (8) Rosenzweig, Norbert, and Charles E. Porter, Repulsion of Energy Levels in Complex Atomic Spectra, *Physical Review* 120.5 (1960) 1698.
- (9) Guhr, Thomas, Axel Müller–Groeling, and Hans A. Weidenmüller, Random-matrix theories in quantum physics: common concepts, *Physics Reports* 299.4-6 (1998) 189.
- (10) Aziz Alaoui, Youssef, and Bruno Laburthe-Tolra. "Method to discriminate between localized and chaotic quantum systems." *Physical Review Research* 6.4 (2024): 043045.
- (11) Nambudiripad, Anjali, J. Bharathi Kannan, and M. S. Santhanam. "Chaos and localized phases in a two-body linear kicked rotor system." *Physical Review E* 109.3 (2024): 034206.
- (12) Sukumar, N. "Universality and Random Matrix Theory. " *Navigating Molecular Networks*. Cham: Springer Nature Switzerland, 2025. 55-67.
- (13) Kota, V. K. B., and N. D. Chavda, Embedded random matrix ensembles from nuclear structure and their recent applications, *International Journal of Modern Physics E* 27.01 (2018) 1830001.
- (14) Brown, B. A., and W. D. M. Rae, The shell-model code NuShellX@MSU, *Nuclear Data Sheets* 120 (2014) 115
- (15) Das, Adway Kumar, et al. "Proposal for many-body quantum chaos detection." *Physical Review Research* 7.1 (2025): 013181.



شکل ۴. نمودار طول جایگزیدگی بر حسب تابعی از انرژی  $^{46}\text{Sc}$ .



شکل ۵. طیف مولتی فرکتالی حاصل از توابع موج نمودار آبی: طیف حاصل از  $^{46}\text{Ca}$  نمودار قرمز: طیف حاصل از  $^{46}\text{Sc}$ .

## منابع

- (1) Muñoz, L., et al. Examination of experimental evidence of chaos in the bound states of  $\text{Pb}^{208}$ , *Physical Review C* 95.1 (2017) 014317.
- (2) Levon, A. I., A. G. Magner, and S. V. Radionov, Statistical analysis of excitation energies in actinide and rare-earth nuclei, *Physical Review C* 97.4 (2018) 044305.
- (3) V. Kota, R. Sahu, Structure of wave functions in (1+ 2)-body random matrix ensembles, *Physical Review E* 64 (1) (2001) 016219.
- (4) M. Vyas, V. Kota, Random matrix structure of nuclear shell model Hamiltonian matrices and comparison with an atomic example, *The European Physical Journal A* 45 (1) (2010) 111.

- (22) Gilpin, William. "Generative learning for nonlinear dynamics." *Nature Reviews Physics* 6.3 (2024): 194-206.
- (23) Yajima, Kohei, et al. "Multifractality in monitored single-particle dynamics." *Physical Review Research* 6.4 (2024): 043049.
- (16) Santos, Lea F., et al. "Thermalization time in many-body quantum systems." (2021).
- (17) Gomez, J. M. G., et al, Many-body quantum chaos: Recent developments and applications to nuclei, *Physics Reports* 499.4-5 (2011) 103.
- (18) Chen, Anffany, Joseph Maciejko, and Igor Boettcher. "Anderson localization transition in disordered hyperbolic lattices." *Physical Review Letters* 133.6 (2024): 066101.
- (19) Chen, Jin-Jun, et al. "Dynamics of quantum coherence in many-body localized systems." *Physical Review A* 110.2 (2024): 022434.
- (20) Dong, Hang, et al. "Measuring the Spectral Form Factor in Many-Body Chaotic and Localized Phases of Quantum Processors." *Physical Review Letters* 134.1 (2025): 010402.
- (21) J. Gomez, K. Kar, V. Kota, R. Molina, J. Retamosa, Localization in 2p1f nuclear shell-model wave functions, *Physics Letters B* 567 (3-4) (2003) 251.

## Investigation the effect of isospin on the nuclear structure based on the multifractal spectrum of the atomic nucleus

Vahedeh Razazi<sup>1\*</sup>, Sohrab Behnia<sup>2</sup>

1. Department of Physics, Urmia Branch, Islamic Azad University, Urmia, Iran

2. Department of Physics, Faculty of Science, Urmia University of Technology, Urmia, Iran

### Article details

Received: 2021/01/17

Accepted: 2025/03/10

Published: 2025/03/15

ISSN: 2588-493x

eISSN: 2588-4821

Correspondence email:

[va.razzazi@iau.ac.ir](mailto:va.razzazi@iau.ac.ir)



### Abstract

The Investigation of the statistical distribution of nuclear energy levels and wave functions in the atomic nucleus as a many-body system is necessary for understanding various reactions of the nuclear structure. We are considering the multifractal spectrum analysis of wavefunction to investigate the effect of isospin on the nuclear structure. This analysis is compared with the results obtained by the localization length and the statistical analysis of the distribution of energy levels based on the Brody distribution function. For this purpose, the  $^{46}\text{Ca}$  with the only neutron in its valence space and its neighbor nuclide  $^{46}\text{Sc}$ , which has different isospin because of replacing one proton to neutron in its valence space, are selected for study on the basis of the nuclear shell model. Energy eigenvalues of the system are calculated with NuShellX code. The amplitudes of wave functions can be achieved by modifying in the new version of this code.

**Keywords:** Multifractal spectrum, Localization length, Brody distribution, Isospin, Nuclear structure